ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОУ ВПО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

Л.А. Золкина

В.М. Мухина

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть II

Методические указания
к решению задач
для студентов заочного отделения
всех специальностей

Екатеринбург
2010

Печатается по рекомендации методической комиссии ФЭУ.
Протокол № 5 от 24 ноября 2008 г.

Рецензент – канд. физ.-мат. наук доцент кафедры высшей математики
С.С. Рублева

Редактор Е.А. Назаренко
Оператор Г.И. Романова

Подписано в печать 24.06.10		Поз. 45
Плоская печать	Формат 60х84 1/16	Тираж 300 экз.
Заказ №	Печ. л. 3,72	Цена 18 руб. 84 коп.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 5. ФУНКЦИЯ. ПРЕДЕЛ

§1. Функциональная зависимость

При изучении различных величин можно заметить, что одни из них сохраняют одно и то же числовое значение – они называются постоянными, а другие – принимают различные числовые значения и называются переменными.

Примерами постоянных величин являются:

1) число π , равное отношению длины окружности L к своему диаметру $2R$ $\left(\pi = \dfrac{L}{2R}\right)$;

2) ускорение свободного падения $g = 9,81\ \text{ì}/\tilde{n}^2$ на широте 45^0;

3) скорость света в вакууме $\tilde{n} = 299800\ \hat{e}\text{ì}/\tilde{n}$.

Постоянные величины обычно обозначаются начальными буквами латинского алфавита $a, b, c, d, \ldots$, а переменные величины – последними буквами – x, y, z.

Абсолютной величиной или ***модулем*** действительного числа x называется неотрицательное число, равное самому x , если $x \geq 0$ и $(-x)$, если $x < 0$. Абсолютная величина числа x обозначается символом $|x|$.

Итак,
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}. \qquad (5.1)$$

Например, $|5| = 5; \quad |-8| = 8$.

Для любых действительных чисел x и y справедливы следующие соотношения:

1) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

2) $|x - y| \geq |x| - |y|$;

3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

4) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$;

5) если $|x| \leq a,$ то $-a \leq x \leq a$;

6) если $|x| > a,$ то $x > a$ или $x < -a$.

Переменная x считается заданной, если известно множество значений, которые она может принимать. Это множество называется областью изменения переменной.

Условимся о следующей терминологии.

1. Отрезком или закрытым интервалом $[a;b]$ называется множество значений x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x \le b$.

2. Интервалом $(a;b)$ – множество значений x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$.

3. Полуоткрытым интервалом $[a;b)$ или $(a;b]$ – множество значений x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x < b$ или $a < x \le b$.

4. Бесконечным интервалом $(-\infty;a), (-\infty;a], (a;+\infty)$, $[a;+\infty), (-\infty;+\infty)$ – множество значений x, удовлетворяющих неравенствам $-\infty < x < a, -\infty < x \le a, a < x < +\infty, a \le x < +\infty, -\infty < x < +\infty$ соответственно.

Переменная величина y называется ***функцией*** независимой переменной x (аргумента), если каждому допустимому значению x поставлено в соответствие одно определенное значение y.

Если y – функция (или зависимая переменная) от x, то записывают $y = f(x)$ или $y = F(x), \quad y = \varphi(x)$.

Область допустимых значений аргумента x называется ***областью определения функции***, а множество значений переменной y называется ***областью изменения функции***.

Частное значение функции $f(x_0)$ – это значение функции $f(x)$, вычисленное при $x = x_0$. Так, например, если $f(x) = 5 + 3x - x^2$, то $f(2) = 5 + 3 \cdot 2 - 2^2 = 7$, а $f(0) = 5$.

1. Найти область определения функции $y = \sqrt{2x - x^2}$.

<u>Решение</u>

Подкоренное выражение $(2x - x^2)$ должно быть неотрицательным, т.е. $2x - x^2 \ge 0$. Преобразуем левую часть неравенства: $x(2-x) \ge 0$. Это неравенство выполняется, если:

$$1)\begin{cases} x \ge 0, \\ 2 - x \ge 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad 2)\begin{cases} x \le 0, \\ 2 - x \le 0. \end{cases}$$

Из первой системы неравенств получим $\begin{cases} x \ge 0 \\ x \le 2 \end{cases}$, откуда $0 \le x \le 2$. Из второй системы неравенств получим $\begin{cases} x \le 0 \\ x \ge 2 \end{cases}$, т.е. несовместную систему.

Итак, область определения данной функции $[0;2]$.

2. Найти область определения функции $y = \dfrac{x+2}{x^2 - 5x + 6}$.

Решение

Функция y существует, если знаменатель дроби $x^2 - 5x + 6 \ne 0$.

Найдем корни уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0 : x_1 = 2, x_2 = 3$. Запишем разложение квадратного трехчлена $x^2 - 5x + 6$ на множители: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) \ne 0$. Отсюда, $x \ne 2, x \ne 3,$ и область определения данной функции (рис 5.1.) представляет собой объединение интервалов: $(-\infty;2) \cup (2;3) \cup (3;+\infty)$.

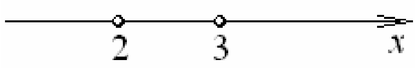

Рис 5.1.

3. Составить линейную функцию $y = y(x)$ для описания полных расходов по перевозке груза на расстояние x некоторым видом транспорта, если постоянные расходы (например, на погрузку, выгрузку и т.п.), не зависящие от расстояния x, составляют 150 (тыс. руб.), а переменные расходы (например, на оплату времени работы водителей, расхода горючего и т.п.) пропорциональны расстоянию x с коэффициентом пропорциональности $k = 5$ (тыс.руб/км.). Определить полные расходы по перевозке груза на расстояние в 60 км.

Решение

Пусть y – полные расходы по перевозке (тыс. руб.), x – расстояние (км), тогда переменные расходы будут $5x$ и $y = 5x + 150$.

Определим расходы по перевозке при $x = 60$.

$y = 5 \cdot 60 + 150 = 300 + 150 = 450$ (тыс. руб.).

Если функция задана одной или несколькими формулами, то говорят, что она задана аналитически. Функцию можно также задать при помощи графика (графический способ) или при помощи таблицы (табличный способ).

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости с координатами $(x; f(x))$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Издержки производства x ед. продукции составляют $(4+0,5x)$ ден. ед. Выразить себестоимость продукции как функцию от x и построить ее график.

Решение

Обозначим y – себестоимость продукции. Себестоимость продукции равна величине издержек на 1 единицу продукции, т.е. $y = \dfrac{4+0,5x}{x} = \dfrac{4}{x} + 0,5$.

По этому уравнению можно составить следующую таблицу значений x и y:

x	0,5	1	2	4	10	100
y	8,5	4,5	2,5	1,5	0,9	0,54

Построим полученные точки в системе координат, соединяя их плавной линией. Это и будет график функции $y = \dfrac{4}{x} + 0,5$.

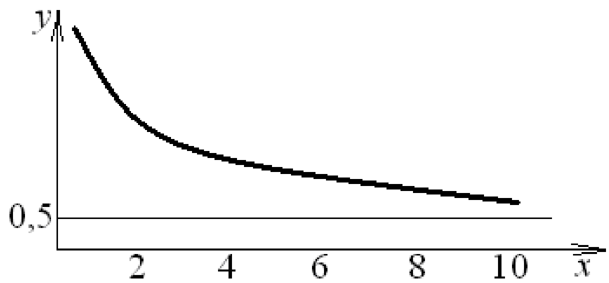

Рис 5.2.

Из предыдущего известно (глава 4, §3), что графиком этой функции является равносторонняя гипербола с вертикальной асимптотой $x = 0$ и горизонтальной асимптотой $y = 0,5$. По смыслу задачи $x > 0$, поэтому на чертеже изображена только правая ветвь гиперболы. При увеличении x слагаемое $\dfrac{4}{x}$ стремится к 0, а значение y приближается к 0,5.

§2. Элементы поведения функции

Рассмотрим некоторые свойства функции, используемые в дальнейшем.

Функции четные и нечетные

Пусть функция $y = f(x)$ имеет область определения, симметричную относительно начала координат. Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если $f(x) = f(-x)$ и ***нечетной***, если $f(-x) = -f(x)$.

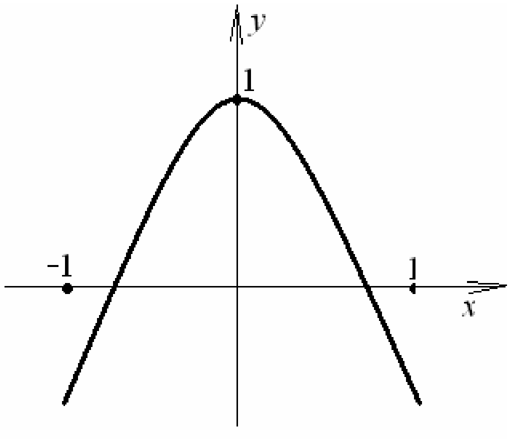

Рис. 5.3.

График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Например, функция $y = -2x^2 + 1$ является четной, т.к. область определения ее $(-\infty;+\infty)$ и $f(-x) = -2(-x)^2 + 1 = -2x^2 + 1 = f(x)$.

Графиком функции $y = -2x^2 + 1$ является парабола, симметричная относительно оси ординат с ветвями, направленными вниз (рис. 5.3).

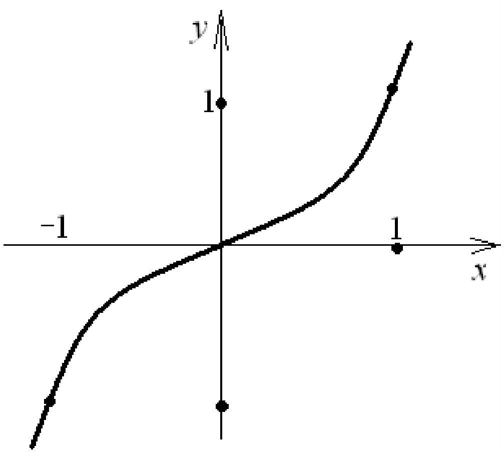

Рис.5.4.

Функция $y = x^3$ является нечетной, т.к. область определения ее симметрична относительно начала координат (интервал $(-\infty;+\infty)$) и $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -x^3 = -f(x)$.

График функции $y = x^3$ называется кубической параболой (рис. 5.4).

Большинство функций нельзя отнести ни к четным, ни к нечетным, например, $y = x^3 + x^2$, $y = \dfrac{1}{x+2}$.

Монотонные функции

Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** (***убывающей***) на интервале $(a;b)$, если для любых двух значений аргумента $x_2 > x_1$ из этого интервала выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ (для убывающей функции $f(x_2) < f(x_1)$).

Функции возрастающие или убывающие называются ***монотонными***.

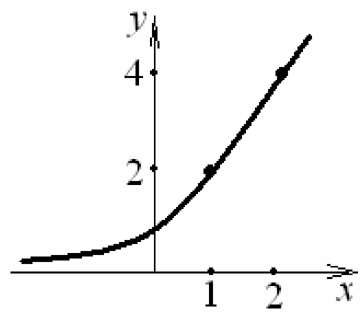

Рис. 5.5.

Например, функция $y = 2^x$ возрастает в области определения $(-\infty;+\infty)$. График ее изображен на рис. 5.5.

Функция $y = \log_{1/2} x$ убывает в области определения $(0;+\infty)$. График ее изображен на рис. 5.6.

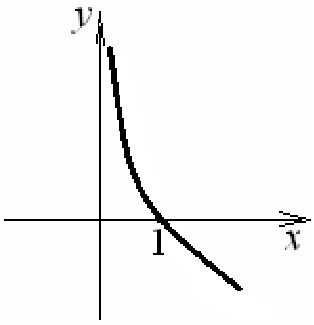

Рис. 5.6.

Для возрастающей функции характерно то, что большим значениям аргумента соответствуют большие значения функции, а для убывающей, наоборот, большим значениям аргумента соответствуют меньшие значения функции.

Если функция не является монотонной во всей области определения, то эту область можно разбить на отдельные интервалы, где будут выполняться условия возрастания или убывания. Такие интервалы называются интервалами монотонности. Так, функция $y = (x-2)^2$ (рис. 5.7) убывает на интервале $(-\infty;2)$ и возрастает на интервале $(2;+\infty)$.

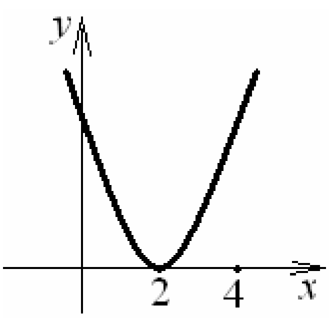

Рис. 5.7

Ограниченные функции

Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной сверху*** на интервале $(a;b)$, если существует такое число A, что $f(x) \le A$ для всех значений аргумента x из этого интервала.

Функция $y = f(x)$ называется ***ограниченной снизу*** на интервале $(a;b)$, если существует такое число B, что $f(x) \ge B$ для всех значений x из интервала $(a;b)$.

Функция называется ***ограниченной***, если она ограничена сверху и снизу, в противном случае, функция называется неограниченной.
Рассмотрим примеры:

1) функция $y = \sin x$ определена на всей числовой оси $(-\infty;+\infty)$ и ограничена, так как при любых значениях x $-1 \le \sin x \le 1$ (рис. 5.8.);

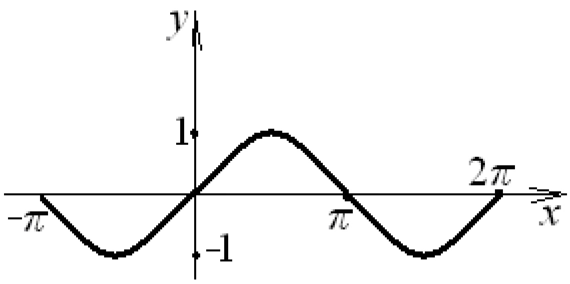

Рис. 5.8.

2) функция $y = \dfrac{1}{x^2}$ на интервале $(0;1)$ ограничена снизу, например, числом 1, но не ограничена сверху (рис. 5.9.).

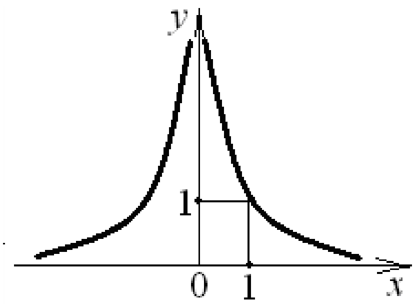

Рис. 5.9

3) функция $y = tg\,x$ на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ не ограничена (рис. 5.10.).

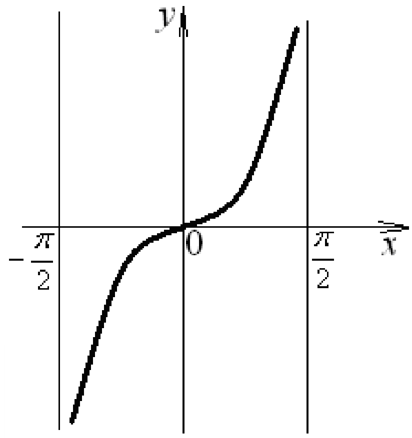

Рис. 5.10

§3. Основные элементарные функции. Сложные функции

Для обзора всего многообразия функций рассмотрим ***основные элементарные*** функции, которые являются как бы «кирпичиками» (элементами) для построения более сложных зависимостей. К ним относятся:

1) ***степенная*** x^{α} (α - действительное число);

2) ***показательная*** $a^x, a \neq 1, a > 0$;

3) ***логарифмическая*** $\log_a x, a \neq 1, a > 0$;

4) ***тригонометрические функции***: $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$.

5) ***обратные тригонометрические функции***: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\, x$, $\mathrm{arcctg}\, x$.

Функцией от функции или ***сложной функцией*** называется функция, аргументом которой служит другая функция.

Пусть $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, тогда переменная y - сложная функция от x, т.е. $y = f(\varphi(x))$.

Переменная u называется промежуточным аргументом, а x - независимой переменной. Например, $y = f(u) = \sin u, u = x^2$, следовательно, $y = \sin x^2$.

Используя построение функции от функции, а также четыре арифметических действия конечное число раз, можно из основных элементарных функций построить разнообразные сложные функции. Все они называются ***элементарными***.

Так, например, $y=\dfrac{2\lg x+\sqrt{x^2+4}}{1-x^3+tg\,x}$ является сложной функцией, в образовании которой участвуют основные элементарные функции: x^n, $\lg x$, $\mathrm{tg} x$, связанные действиями сложения, вычитания, умножения и деления.

§4. Предел последовательности

Функция называется ***функцией целочисленного аргумента***, если она определена только для целых положительных значений аргумента ($n=1,2,3\ldots$).

Обозначим такую функцию $u_n=f(n)$. Если придавать n значения 1, 2, 3 …, то значения функции $f(n)$ образуют последовательность $u_1=f(1),\ u_2=f(2)\ \ldots,u_n=f(n),\ldots$.

Последовательностью $u_1,u_2,\ldots u_n,\ldots$ называется множество значений функции целочисленного аргумента, расположенных в порядке возрастания n; u_n называется ***общим членом*** последовательности.

5. Полагая $n=1,2,3,\ldots$, записать последовательности, соответствующие следующим функциям:

1) $f(n)=2n-1$; 2) $f(n)=\dfrac{1}{n}$; 3) $f(n)=\dfrac{n-1}{n}$; 4) $f(n)=2+(-1)^n$.

Определить характер поведения последовательностей при неограниченном увеличении n, т.е. при $n\to\infty$.

Решение

Вычисляя значения функции при указанных значениях n, получим таблицу

n / $f(n)$	1	2	3	4	5	6	…	$n\to\infty$
$2n-1$	1	3	5	7	9	11	…	$f(n)\to+\infty$
$\dfrac{1}{n}$	1	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{6}$	…	$f(n)\to 0$
$\dfrac{n-1}{n}$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{3}{4}$	$\dfrac{5}{6}$	$\dfrac{7}{8}$	…	$f(n)\to 1$
$2+(-1)^n$	1	3	1	3	1	3	…	Колеблющаяся последовательность

График функции целочисленного аргумента будет состоять из отдельных точек. Построим графики перечисленных функций.

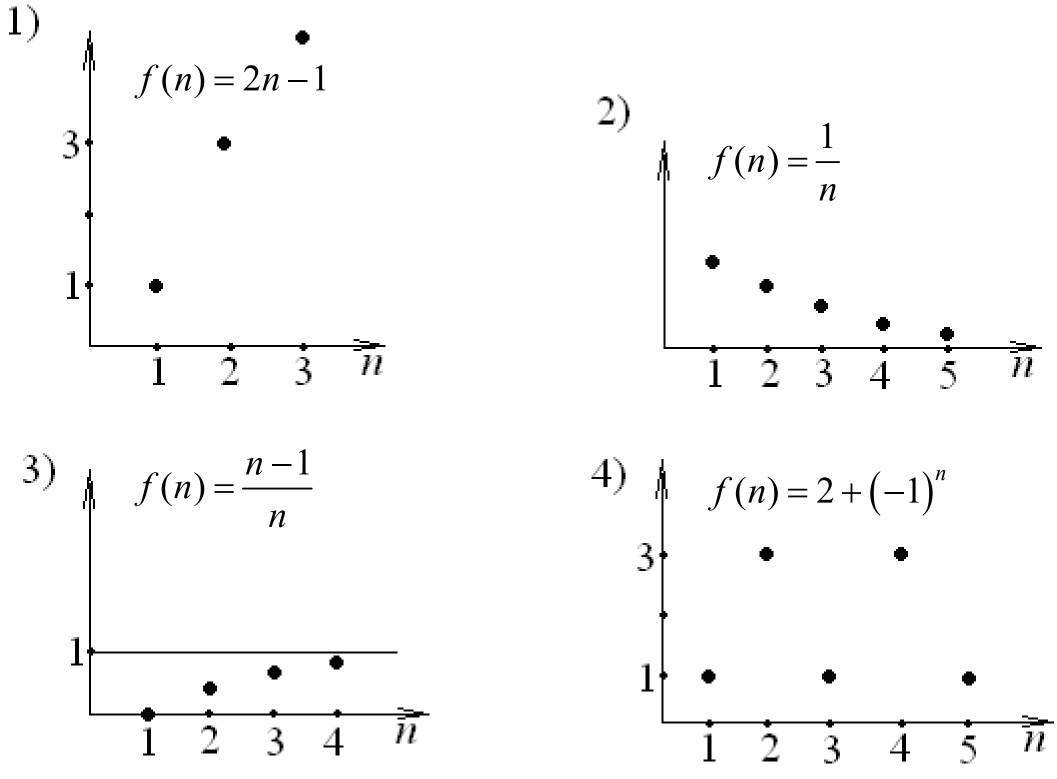

Рис 5.11.

Члены последовательности $f(n)=2n-1$ при $n\to\infty$ неограниченно возрастают, т.е. $(2n-1)\to\infty$.

Последовательность с общим числом $f(n)=\dfrac{1}{n}$ убывает при $n\to\infty$, и ее члены приближаются к 0, т.е. $\dfrac{1}{n}\to 0$. Члены последовательности $f(n)=\dfrac{n-1}{n}$ возрастают и приближаются к 1, а – $f(n)=2+(-1)^n$ колеблются, не стремятся к определенному числу.

В дальнейшем под словом «члены последовательности приближаются к постоянному числу» мы будем понимать следующее: разность между членами последовательности и постоянным числом по абсолютной величине, начиная с некоторого момента, становится как угодно малой. Это постоянное число и будем называть пределом последовательности.

Рассмотрим последовательность с общим членом $f(n)=\frac{1}{n}$. Возьмем число $\varepsilon = 0,5$ и посмотрим, начиная с какого момента абсолютная величина разности между $\frac{1}{n}$ и числом 0 меньше $\varepsilon = 0,5$:

$\left|\frac{1}{n}-0\right|<0,5$ или $\left|\frac{1}{n}\right|<0,5$, отсюда $n>\frac{1}{0,5}=2$. Таким образом, при $n>N=2$ это неравенство выполняется.

Пусть теперь $\varepsilon = 0,1$, тогда $\left|\frac{1}{n}\right|<0,1$ и $n>10=N$. Для любого $\varepsilon>0$ $\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$ выполняется при $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Итак, для любого $\varepsilon>0$ можно взять любое целое число $N>\frac{1}{\varepsilon}$. Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

Число *A* называется ***пределом функции*** $f(n)$ ***при*** $n\to\infty$ (или ***пределом последовательности***), если для любого наперед заданного $\varepsilon>0$ найдется целое $N>0$, что для всех значений $n>N$ выполняется неравенство $|f(n)-A|<\varepsilon$.

Это записывают так: $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$.

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1,$ т.е. $A=1$.

Возьмем произвольные $\varepsilon>0$ и решим неравенство $\left|\frac{n-1}{n}-1\right|<\varepsilon$.

Преобразовав выражение под знаком модуля, получим $\left|1-\frac{1}{n}-1\right|<\varepsilon$ или $\frac{1}{n}<\varepsilon$, отсюда $n>\frac{1}{\varepsilon}$ и, следовательно, в качестве *N* можно взять любое целое число, большее $\frac{1}{\varepsilon}$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$.

§5. Предел функции

Если функция определена для всех значений аргумента из некоторого интервала $(a;b)$, то ее называют функцией непрерывного аргумента.

Например, функция $y = x^3$ определена на всей числовой оси, т.е. на интервале $(-\infty;+\infty)$, а функция $y = \log_2(x-1)$ определена для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $x - 1 > 0$ или $x > 1$.
Значит, область определения этой функции интервал $(1;+\infty)$.

Пусть переменная x неограниченно возрастает по абсолютной величине, т.е. $x \to \infty$ $(x \to +\infty$ или $x \to -\infty)$. Может случиться так, что по мере увеличения $|x|$ значения функции $f(x)$ неограниченно приближаются к числу *A*.

Число *A* называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***при*** $x \to \infty$, если для любого, как угодно малого числа $\varepsilon > 0$, найдется такое число $N > 0$, что при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Это записывают так: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

6. Доказать, исходя из определения предела, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{x} = 2$.

Решение

Пусть ε – любое положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое $N > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$, будет выполняться неравенство $\left|\dfrac{2x+1}{x} - 2\right| < \varepsilon$. Решим это неравенство относительно x: $\left|2 + \dfrac{1}{x} - 2\right| < \varepsilon$, $\left|\dfrac{1}{x}\right| < \varepsilon$ или $|x| > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, можно принять, что $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ найдено $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$ такое, что из неравенства $|x| > N$ следует выполнение неравенства $\left|\dfrac{2x+1}{x} - 2\right| < \varepsilon$. Это и доказывает, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{x} = 2$.

Проиллюстрируем определение предела функции при $x \to \infty$ геометрически. Построим график функции $y = \dfrac{2x+1}{x} = 2 + \dfrac{1}{x}$ (рис.5.12). Графиком является равносторонняя гипербола с асимптотами $y = 2$ и $x = 0$. Ветви гиперболы находятся в I и III четвертях по отношению к точке пересечения асимптот. Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$ и отложим

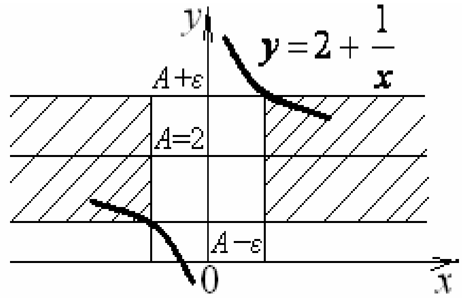

Рис. 5.12.

его значение от точки *A*=2 вверх и вниз по оси ординат, получим точки $y = A + \varepsilon$ и $y = A - \varepsilon$. Через эти точки проведем прямые, параллельные оси абсцисс и для $x > N$ и $x < -N$ график функции попадает в полосу шириной 2ε, ограниченную прямыми $y = A + \varepsilon$ и $y = A - \varepsilon$.

Пусть независимая переменная x принимает любые значения, как угодно близкие к x_0 (но $x \neq x_0$), т.е. $x \to x_0$. Может случиться, что при этом соответствующие значения функции $f(x)$ неограниченно приближаются к некоторому числу *A* (причем в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ может быть и не определена). В этом случае говорят, что число *A* есть предел функции при $x \to x_0$.

Число А называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***при*** $x \to x_0$, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что для всех $x \neq x_0$ и удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Это записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

7. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 3}(2x - 4) = 2$, исходя из определения предела.

Решение

Возьмем ε – любое положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - 3| < \delta$, выполняется неравенство $|(2x - 4) - 2| < \varepsilon$.

Решим это неравенство относительно *x:* $|2x - 4 - 2| < \varepsilon$, $|2x - 6| < \varepsilon$, $2|x - 3| < \varepsilon$ è $|x - 3| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, в качестве

δ можно принять $\frac{\varepsilon}{2}$. Итак, для x, удовлетворяющих неравенству $|x-3|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, выполняется неравенство $|(2x-4)-2|<\varepsilon$, значит $\lim\limits_{x\to 3}(2x-4)=2$.

§6. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $y=f(x)$ называется ***бесконечно малой при*** $x\to x_0$ (или ***при*** $x\to\infty$), если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)=0$. Например, функция $y=\frac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x\to\infty$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

Функция $y=2x-6$ – бесконечно малая при $x\to 3$, так как $\lim\limits_{x\to 3}(2x-6)=0.$

Функция $y=f(x)$ называется ***бесконечно большой при*** $x\to x_0$ (или ***при*** $x\to\infty$), если при этом условии (предельном переходе) значения функции по абсолютной величине неограниченно увеличиваются. Говорят, что в этом случае $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)=\infty$ (или не существует).

Например, функция $y=2x-6$ является бесконечно большой при $x\to\infty$, так как ее значения неограниченно растут с увеличением x . $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-6)=+\infty$.

Функция $y=\frac{1}{x}$ – бесконечно большая при $x\to 0$, так как при стремлении x к 0 ее значения могут стать сколь угодно большими. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$.

Бесконечно большие функции находятся в тесной связи с функциями бесконечно малыми. Если при данном предельном переходе $(x\to x_0$ или $x\to\infty)$ функция $f(x)$ является бесконечно большой, то функция $\varphi(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при том же предельном переходе и – обратно. Так, если функция $y=2x-6$ – бесконечно большая при $x\to+\infty$, то функция $y=\dfrac{1}{2x-6}$ – бесконечно малая при $x\to+\infty$. Та же самая функция $y=2x-6$ при $x\to3$ является бесконечно малой, а функция $y=\dfrac{1}{2x-6}$ – бесконечно большой при $x\to3$.

§7. Основные теоремы о бесконечно малых функциях и о пределах

При решении примеров, связанных с вычислением пределов функций, необходимо знать следующие теоремы.

1. Сумма конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.
2. Произведение бесконечно малой и ограниченной функции есть функция бесконечно малая.
3. Предел постоянной равен самой постоянной.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} C=C \tag{5.2}$$

Пусть пределы функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ существуют при $x\to x_0\ (x\to\infty)$.

4. Предел алгебраической суммы двух функций равен сумме пределов тех же функций:

$$\lim_{x\to x_0(x\to\infty)}(f(x)+\varphi(x))=\lim_{x\to x_0(x\to\infty)} f(x)+\lim_{x\to x_0(x\to\infty)}\varphi(x). \tag{5.3}$$

5. Предел произведения двух функций равен произведению пределов тех же функций:

$$\lim_{x\to x_0(x\to\infty)}\big(f(x)\cdot\varphi(x)\big)=\lim_{x\to x_0(x\to\infty)} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0(x\to\infty)}\varphi(x). \tag{5.4}$$

6. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x\to x_0(x\to\infty)} C\,f(x)=C\lim_{x\to x_0(x\to\infty)} f(x),\ C\text{ – постоянная.} \tag{5.5}$$

7. Предел отношения двух функций равен отношению пределов:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \varphi(x)}, \text{ если } \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\varphi(x)\neq 0. \qquad (5.6)$$

8. Предел функции $f(x)$ в целой положительной степени n равен той же степени предела основания степени:

$$\lim_{x\to x_0(x\to\infty)}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to x_0(x\to\infty)} f(x)\right)^n. \qquad (5.7)$$

8. Найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(4x+3-\dfrac{2}{x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-3x^2+5}{x^2+5}$.

Решение

Пользуясь теоремами 3–8, последовательно находим:

1) $$\lim_{x\to 1}(4x+3-\frac{2}{x})=\lim_{x\to 1}4x+\lim_{x\to 1}3-\lim_{x\to 1}\frac{2}{x}=4\lim_{x\to 1}x+3-\frac{2}{\lim\limits_{x\to 1}x}=$$

$$=4\cdot 1+3-\frac{2}{1}=5 \qquad \left(\lim_{x\to 1}x=1\right).$$

2) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-3x^2+5}{x^2+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^4-3x^2+5)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+5)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^4-3\lim\limits_{x\to 2}x^2+5}{\lim\limits_{x\to 2}x^2+5}=$$

$$=\frac{(\lim\limits_{x\to 2}x)^4-3(\lim\limits_{x\to 2}x)^2+5}{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2+5}=\frac{2^4-3\cdot 2^2+5}{2^2+5}=\frac{9}{9}=1 \quad \left(\lim_{x\to 2}x=2\right).$$

При вычислении пределов мы будем также пользоваться теоремой: если $f(x)$ – элементарная функция, то в любой точке x_0 области определения функции имеет место равенство

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0}x\right)=f(x_0).$$

Итак, предел элементарной функции вычисляется подстановкой в функцию предельного значения аргумента.

9. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -2}(x\sqrt{x^2+12}+4^{-x}-2)$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{x^2+3x-11}$; 3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-11}{x-4}$.

Решение

Функции, стоящие под знаками указанных пределов, элементарные. Вычислим пределы, подставив в функции предельные значения аргументов.

1) $\lim\limits_{x\to -2}\left(x\sqrt{x^2+12}+4^{-x}-2\right)=-2\sqrt{(-2)^2+12}+4^2-2=-2\sqrt{16}+16-2=$

$=-2\cdot 4+16-2=6.$

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{x^2+3x-11}=\dfrac{4-4}{4^2+3\cdot 4-11}=\dfrac{0}{17}=0$, значит функция $\dfrac{x-4}{x^2+3x-11}$ есть бесконечно малая при $x\to 4$.

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-11}{x-4}$. Здесь $\lim\limits_{x\to 4}\left(x^2+3x-11\right)=17$, $\lim\limits_{x\to 4}(x-4)=0$, и теорема о пределе частного не применима, так как предел знаменателя равен 0 . Заметим, что функция $\dfrac{x^2+3x-11}{x-4}$ является обратной величиной к $\dfrac{x-4}{x^2+3x-11}$ и, следовательно, $\dfrac{x^2+3x-11}{x-4}$ – бесконечно большая функция при $x\to 4$, т.е. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-11}{x-4}=\infty$.

§8. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

Рассмотрим примеры вычисления пределов функций, когда теорема о пределе частного не применима.

10. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2-5x+4}$; 3) $\lim\limits_{x\to +1}\dfrac{\sqrt{1+8x}-3}{x^2-1}$.

Решение

1) Вычислим предел знаменателя: $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-9\right)=0$; и теорема о пределе частного не может быть применена. Непосредственная подстановка под знак предела значения x=3 приводит к неопределенному выражению $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{3-3}{9-9}=\frac{0}{0}$, т.е. функция под знаком предела представляет собой отношение двух бесконечно малых функций (неопределенность вида $\frac{0}{0}$). Разлагаем знаменатель на множители и сократим числитель и знаменатель на множитель $x-3\neq 0$ (согласно определению предела функции аргумент x стремится к своему предельному значению 3, никогда с ним не совпадая, т.е. $x\neq 3$).

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}.$$

2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2-9x+4}{x^2-5x+4}$. Здесь также имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Найдем корни числителя и знаменателя:

$$2x^2-9x+4=0,\quad x_1=\frac{1}{2}, x_2=4.$$

$$x^2-5x+4=0,\quad x_1=1, x_2=4.$$

Сделаем разложение числителя и знаменателя на множители по формуле разложения квадратного трехчлена на множители

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x^2-9x+4}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 4}\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{2x-1}{x-1}=\frac{2\cdot 4-1}{4-1}=\frac{7}{3}.$$

Сокращением на множитель $(x-4)$ числителя и знаменателя неопределенность раскрыта.

3) $\lim\limits_{x\to +1}\frac{\sqrt{1+8x}-3}{x^2-1}=\frac{\sqrt{8\cdot 1+1}-3}{1^2-1}=\frac{3-3}{1-1}=\frac{0}{0}.$

Непосредственной подстановкой $x=1$ в функцию убеждаемся, что имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть её, умножаем числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю $\left(\sqrt{8x+1}+3\right)$, а знаменатель разлагаем на множители:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{8x+1}-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{8x+1}-3\right)\left(\sqrt{8x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{8x+1}+3\right)(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{8x+1}\right)^2-3^2}{\left(\sqrt{8x+1}+3\right)(x-1)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{8x+1-9}{\left(\sqrt{8x+1}+3\right)(x-1)(x+1)}==\lim_{x\to1}\frac{8x-8}{\left(\sqrt{8x+1}+3\right)(x-1)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{8(x-1)}{\left(\sqrt{8x+1}+3\right)(x-1)(x+1)}==\lim_{x\to1}\frac{8}{\left(\sqrt{8x+1}+3\right)(x+1)}=$$

$$=\frac{8}{(3+3)(1+1)}==\frac{8}{12}=\frac{2}{3}.$$

11. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+x}{x^2-10}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+1}{x^4-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-6x^2}{x^3+7}$.

Решение

1) Найдем пределы числителя и знаменателя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(5x^2+x\right)=\lim_{x\to\infty}x(5x+1)=\infty\cdot\infty=\infty, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(x^2-10\right)=\infty.$$

Здесь пределы числителя и знаменателя не существуют, и мы имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для раскрытия неопределенности в подобных примерах числитель и знаменатель делим на степень x с наивысшим показателем $\left(x^2\right)$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x}{x^2-10}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{10}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{1}{x}}{1-\frac{10}{x^2}},$$

$\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}$ – бесконечно малые функции при $x \to \infty$,т.е. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0;\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0.$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{1}{x}}{1-\frac{10}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{10}{x^2}\right)} = \frac{5+0}{1+0} = 5.$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+1}{x^4-2}$.

Вычислим $\lim\limits_{x\to\infty}\left(4x^3-2x^2+1\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(2x^2(2x-1)+1\right) = \infty,\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(x^4-2\right) = \infty.$

Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделив числитель и знаменатель на x^4 , получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^3}{x^4}-\frac{2x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}-\frac{2}{x^4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x^4}} = \frac{0-0+0}{1-0} = 0\,,$$

$\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{x^4}, \frac{1}{x^2}\ \text{– бесконечно малые при}\ x\to\infty\right)$.

3) Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделив числитель и знаменатель на x^5 , получим $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-6x^2}{x^3+2} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{6}{x^3}}{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^5}} = \frac{1-0}{0+0} = \infty$, т.е. функция $\frac{x^5-6x^2}{x^3+2}$ является бесконечно большой при $x\to\infty$.

§9. Замечательные пределы

Первый замечательный предел

При вычислении пределов, под знаком которых содержатся тригонометрические функции, часто используется формула:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad (x \text{ – радианная мера угла}) \tag{5.8}$$

Функция $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x\to 0$ представляет отношение двух бесконечно малых, т.е. имеет место неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

12. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sin 3x}$.

Решение

Непосредственной подстановкой $x=0$ в функции убеждаемся во всех трех случаях, что имеет место неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Затем подвергаем функцию преобразованиям и используем первый замечательный предел.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 5x}{5x}=5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5$ (если $x\to 0$, то и $5x\to 0$);

2) применим формулу тригонометрии $1-\cos 2x=2\sin^2 x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2=2\cdot 1^2=2.$$

3) умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное к числителю, т.е. на $\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{\sin 3x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2-2^2}{\sin 3x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4-4}{\sin 3x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}==\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}.$$

Если $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, то и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{3\sin 3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{0}{\sqrt{4}+2}=\frac{0}{4}=0\text{, итак, }\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sin 3x}=\frac{1}{3}\cdot 0=0.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \tag{5.9}$$

или

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

(В обоих случаях имеем неопределенность вида 1^∞).

Число e = 2,718... иррациональное. Наряду с числом $\pi=3{,}14...$числу e принадлежит большая роль в математике и ее технических приложениях. Логарифмы чисел по основанию e называются натуральными и обозначаются $\ln x$

$$\log_e x=\ln x\,.$$

13. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^x$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+3x}$.

<u>Решение</u>

Имеем неопределенность вида 1^∞ . Каждую из данных функций преобразуем так, чтобы применить второй замечательный предел.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right)^5=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right)^5=e^5.$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+3x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{3}{3x}}=\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right)^3=e^3.$

Найти самостоятельно следующие пределы:

14. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$. 15. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{x+4}$.

16. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$. 17. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{2-\sqrt{x-1}}$.

$\boxed{18.}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+1}{3x-7}$.

$\boxed{19.}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x}{3x^4+2}$.

$\boxed{20.}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{5x}$.

$\boxed{21.}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos 4x}}$.

$\boxed{22.}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3}{2x^3+3x+1}$.

$\boxed{23.}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{4x}$.

Ответы: **14.** –2. **15.** –8. **16.** $\frac{1}{8}$. **17.** $-\frac{2}{3}$. **18.** ∞.

19. 0. **20.** 1,4. **21.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **22.** 0,5. **23.** e^8.

§10. Приращение функции. Непрерывность функции

При рассмотрении переменной величины часто обращают внимание не только на ее изменяющиеся значения, но и на размеры увеличения или уменьшения ее значений (приращения).

Возьмем, например, данные о выработке продукции на некотором предприятии за определенное число месяцев (x) в течении года и составим таблицу.

Время x (мес.)	1	3	6	8	10	12
Объем продукции y (усл. ед.)	6	18	35	44	52	62
Приращение Δy		+12	+17	+9	+8	+10
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$		6	5.7	4,5	4	5

Итак, объем продукции y – функция от времени x, т.е. $y = f(x)$ и для ряда последовательных значений аргумента $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ мы имеем значения функции $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$.

Приращениями аргумента x мы будем называть разности

$x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$ ..., а приращениями функции разности

$f(x_2) - f(x_1), f(x_3) - f(x_2), \ldots$

Приращение обозначается буквой Δ. Таким образом, Δx читается так: «дельта x или приращение x», Δy – «дельта y или приращение y».

В нашем примере, считая, что $x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 6 \ldots$, $y_1 = 6, \quad y_2 = 18, \quad y_3 = 35 \ldots$, получим

$$\Delta x_2 = 3 - 1 = 2, \qquad \Delta x_3 = 6 - 3 = 3, \qquad \Delta x_4 = 8 - 6 = 2 \quad \ldots$$

$$\Delta y_2 = 18 - 6 = 12, \qquad \Delta y_3 = 35 - 18 = 17, \qquad \Delta y_4 = 44 - 35 = 9 \quad \ldots$$

Приращение показывает, на сколько увеличивается или уменьшается переменная величина. С понятием приращения и бесконечно малой тесно связано понятие непрерывности функции.

Рассмотрим пример. Пусть x – количество электроэнергии (квт/ч), израсходованное предприятием, а y – стоимость ее (усл.ед.), k - стоимость 1 квт/ч, тогда зависимость между x и y выразится уравнением $y = kx$. График этой функции − прямая линия (5.13.).

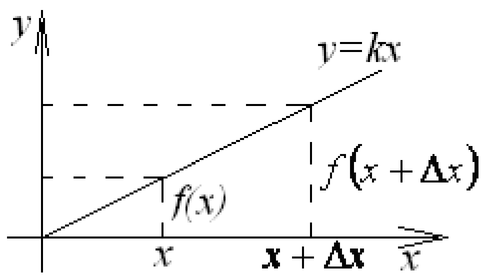

Рис.5.13.

Нетрудно заметить, что если два значения аргумента x и $x + \Delta x$ близки друг к другу, то и соответствующие значения функции $f(x)$ и $f(x + \Delta x)$ близки друг к другу, т.е. при

$$\Delta x \to 0 \ \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \to 0.$$

Такие функции называются непрерывными.

Но введем в задачу новое условие: с целью стимулирования экономии электроэнергии установлено два разных тарифа – до расхода $x = a$ тариф равен, как и выше k, но если расход превышает величину a, то тариф увеличивается на p, т.е.

$y = kx,$ если $x \le a$ и $y = (k + p)x$, если $x > a$

или $y = \begin{cases} kx, & x \le a \\ (k + p)x, & x > a. \end{cases}$

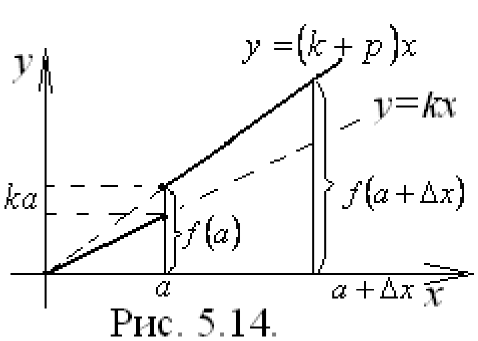

Рис. 5.14.

Построим график этой функции (рис. 5.14.) Рассмотрим два значения аргумента $x = a$ и $x = a + \Delta x$ ($\Delta x > 0$) и вычислим приращение функции

$\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a) = (k+p)(a+\Delta x) - ka$. Перемножим скобки и произведем преобразования:
$\Delta y = ka + pa + (k+p)\Delta x - ka = pa + (k+p)\Delta x$.

Если Δx уменьшается, т.е. $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to pa$ (постоянная величина). Здесь мы имеем дело с отсутствием непрерывности, с разрывом в изменении функции в точке $x = a$. При переходе аргумента x через точку a функция делает скачок, величина скачка равна (pa).

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если:

1) она определена в этой точке и некоторой ее окрестности;

2) бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right) = 0.$$

Этому определению равносильно следующее.

Функция называется ***непрерывной*** в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если в точке $x = x_0$ какое либо из условий непрерывности не выполняется, то x_0 называется ***точкой разрыва*** функции.

Функция называется непрерывной на интервале, если она непрерывна в каждой его точке.

Понятие непрерывности и разрыва функции можно наглядно показать на графике функции. График функции, непрерывной на интервале, изображается сплошной (непрерывной) линией (рис.5.13).

24. Построить график функции, указать точки разрыва и выяснить, какое из условий непрерывности не выполнено в этих точках:

1) $y = \dfrac{1}{x-3}$; 2) $y = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 \text{ ï ðè } x \le 2 \\ x \text{ ï ðè } x > 2 \end{cases}$.

Решение

1) Графиком функции $y = \dfrac{1}{x-3}$ является равносторонняя гипербола с

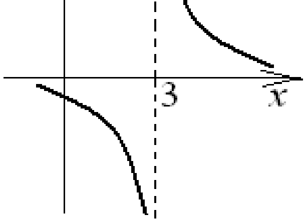

Рис. 5.15.

асимптотами $y = 0$, $x = 3$ (рис. 5.15). Функция всюду непрерывна, кроме точки $x = 3$. В этой точке функция не определена, так как при $x = 3$ знаменатель дроби обращается в 0, и значение функции не существует. Нарушено 1-ое условие непрерывности. Итак, $x=3$ – точка разрыва функции.

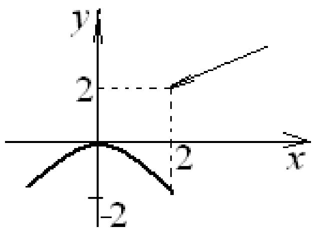

Рис.5.16.

3) Функция определена во всех точках числовой оси. Построим ее график (рис.5.16). В точке $x=2$ функция разрывна, $x=2$ – точка разрыва (конечного), здесь нарушено 2 - ое условие непрерывности. Величина скачка при переходе через точку $x=2$ равна 4.

§11. Понятие о производственных функциях в экономике

Функция, которая определяет соответствие между переменными величинами, характеризующими ход конкретного процесса в экономике, называется ***производственной***.

Производственные функции получают в результате изучения и обработки результатов хозяйственной деятельности или на основе специально поставленных экспериментов. Поэтому они отражают процесс лишь приближенно, являясь его математической моделью. Производственные функции дают возможность анализировать и прогнозировать результаты экономической деятельности. Примеры таких функций рассмотрены в §1 гл. 5. Приведем еще несколько примеров.

1. При определенных условиях спрос на некоторый товар есть функция цены.

Обозначим s - спрос на товар (количество товара или услуг, запрашиваемое потребителем, выражается в усл.ед.), z - цена товара (ден.ед.).

Зависимость между спросом и ценой $s=s(z)$, например, $s=\dfrac{200}{z+4}$ или $s=ae^{-2z}$.

2. Можно поставить вопрос о том, как зависит цена товара от изменения спроса, т.е. какова функция $z=z(s)$.

Если $s=\dfrac{200}{z+4}$, то можно выразить отсюда z как функцию s:

$$z+4=\frac{200}{s}, \quad z=\frac{200}{s}-4=\frac{200-4s}{s}.$$

3. Если s – спрос на данный товар, а z – цена товара, то выручка от реализации товара $u=s\cdot z$.

Например, при $s=\dfrac{200}{z+4}$ выручка $u=\dfrac{200z}{z+4}$ – функция цены z.

4. Предложение какого-либо товара, труда или услуг зависит от их цен. Если z – цена товара, а p – предложение товара, то $p = p(z)$.

25. Предложение некоторого товара выражается формулой $p = \dfrac{20 + 4z^2}{1 + 10z}$, а спрос $s = \dfrac{20 + 20z}{1 + 10z}$. Определить цену z, при которой спрос и предложение уравновешены.

Решение

По условию задачи $s = p$,

$\dfrac{20 + 4z^2}{1 + 10z} = \dfrac{20 + 20z}{1 + 10z}$, $\quad 20 + 4z^2 = 20 + 20z$, $\quad 4z^2 = 20z$, и

так как $z \neq 0$ и $4z(z-5) = 0$, получим, что $z = 5$. Таким образом, спрос и предложение уравновешены при цене $z = 5$. Эта цена называется ***равновесной***.

Глава 6. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§1. Понятие производной. Основные правила и формулы дифференцирования

В ряде вопросов важное значение наряду с величиной самой функции имеет скорость ее изменения в зависимости от изменения ее аргумента. Так, в таблице (§10, гл. 5) даны приращения функции y (объем продукции). Вычислим приращения функции, которые приходятся на единицу изменения аргумента, т.е. $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$. Значения этих отношений приведены в последней строке таблицы: 12:2=6, 17:3=5,7, 9:2=4,5, 8:2=4, 10:2=5. Эти числа характеризуют среднемесячный прирост объема продукции, по ним можно судить о скорости возрастания функции.

Пусть $(x; x + \Delta x)$ – интервал времени, на котором исследуется изменение функции $y = f(x)$. Вычислим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ – среднемесячный прирост объема продукции и чтобы получить ответ на вопрос, какова скорость изменения y в данный момент x, нужно найти $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Это и есть производная функции y по x.

Производной функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к 0.

Производная обозначается

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (6.1)$$

(читается: «y штрих» или «f штрих от x»). Иногда используется и такое обозначение производной: $y' = \frac{dy}{dx}$ (читается dy по dx).

Нахождение производной называется ***дифференцированием*** функции.

26. Пользуясь определением производной, найти производные следующих функций: 1) $y = x^2$; 2) $y = \sqrt{x}$; 3) $y = x$.

Решение

1. Дадим x приращение $\Delta x \neq 0$, получим $x + \Delta x$ и вычислим

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 =$$
$$= (2x + \Delta x)\Delta x$$

Находим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2x + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$

Вычисляем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2x + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 2x$ ($2x$ не зависит от Δx и поэтому находим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} 2x$, как предел постоянной). Итак, $(x^2)' = 2x$.

2. Здесь $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$.

Вычисляем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)},$$

имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, раскрываем ее умножением числителя и знаменателя на выражение, сопряженное к числителю $\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3. $\Delta y=x+\Delta x-x=\Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}1$, т.е. $\left(x\right)'=1$ или производная независимой переменной равна 1.

Точно так же можно получить все формулы таблицы производных.

Функция $y=f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $x=x_0$, если в этой точке существует конечная производная $f'(x_0)$.

Например, функция $y=\sqrt{x}$ дифференцируема при x=4, так как $y'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$. Но $y=\sqrt{x}$ не дифференцируема в точке x=0, так как $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ в этой точке не существует (знаменатель обращается в 0).

Пусть функции $\boldsymbol{u=u(x)}$ и $\boldsymbol{v=v(x)}$ – дифференцируемы в рассматриваемой точке x. Сформулируем без доказательства основные правила дифференцирования.

1. Производная постоянной равна 0, т.е. $\boldsymbol{\tilde{N}'=0}$ (С - постоянная). (6.2)

2. Производная алгебраической суммы двух функций равна сумме производных

$$\boldsymbol{(u(x)+v(x))'=u'(x)+v'(x)}. \tag{6.3}$$

3. Производная произведения двух функций равна сумме произведений производной первого сомножителя на второй и производной второго сомножителя на первый

$$\boldsymbol{(u(x)\cdot v(x))'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)}. \tag{6.4}$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак производной

$$(Cu(x))' = Cu'(x), \text{ где } C\text{– постоянная.} \qquad (6.5)$$

5. Производная частного двух функций $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ $(v(x) \neq 0)$ вычисляется по формуле

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}. \qquad (6.6)$$

6. Производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимой переменной. Если

$$y = f(u), u = u(x), \text{ то } y' = f'(u)\cdot u'(x). \qquad (6.7)$$

Далее приведем без доказательства таблицу производных основных элементарных функций, учитывая, что $u = u(x)$ - дифференцируемая функция в точке x:

1) $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$, α - постоянное число; (6.8)

2) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, α - постоянное число, $a > 0, a \neq 1$, (6.9)

$(e^u)' = e^u u'$;

3) $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{\ln a \cdot u}$ $(a > 0, a \neq 1)$, (6.10)

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$;

4) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; (6.11)

5) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$; (6.12)

6) $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$; (6.13)

7) $(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$; (6.14)

8) $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; (6.15)

9) $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; (6.16)

10) $\mathbf{(arc\,tg\,u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}}$; (6.17)

11) $\mathbf{(arc\,ctg\,u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}}$. (6.18)

$\boxed{\textbf{27.}}$ Функция $f(x) = 2x^3 + 6x - 5$. Найти $f'(0),\ f'(2)$.

Решение

Применяя вышеперечисленные правила (6.1-6.5, 6.7), получим
$f'(x) = (2x^3)' + (6x)' - (5)' = 2(x^3)' + 6(x)' - 0 = 2\cdot 3x^2 + 6 = 6x^2 + 6$.

Вычислим $f'(0)$, подставляя в производную $f'(x)$ вместо x значение, равное 0. $f'(0) = 6\cdot 0^2 + 6 = 6$. Точно так же вычислим $f'(2) = 6\cdot 2^2 + 6 = 30$.

$\boxed{\textbf{28.}}$ Пользуясь правилами и формулами дифференцирования, найти производные следующих функций:

1) $y = \sqrt{x} + \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{x^3}$;

2) $y = x^4\left(4 - \dfrac{x}{2} + 3x^3\right)$;

3) $y = \dfrac{x^3}{x^4+5}$;

4) $y = \dfrac{6}{\sin x + 2\cos x}$

Решение

1. Преобразуем функцию: $y = x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{3}} - x^{-3}$,

$y' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + \left(5x^{-\frac{1}{3}}\right)' - \left(x^{-3}\right)'$. Далее воспользуемся формулой производной степенной функции:
$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$..

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 5\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1} - \left(-3x^{-4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{3}x^{-\frac{4}{3}} + 3x^{-4} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{3}{x^4}.$$

2. 1-й способ. Пользуясь формулой (6.4), получим

$$y' = (x^4)'(4 - \frac{x}{2} + 3x^3) + x^4(4 - \frac{x}{2} + 3x^3)' = 4x^3(4 - \frac{x}{2} + 3x^3) + x^4(4' - \frac{1}{2}x' + 9x^2) =$$
$$= 4x^3(4 - \frac{x}{2} + 3x^3) + x^4(-\frac{1}{2} + 9x^2) = 21x^6 - \frac{5}{2}x^4 + 16x^3.$$

2-й способ. Сначала раскроем скобки, затем дифференцируем как сумму функций:

$$y = x^4(4 - \frac{x}{2} + 3x^3) = 4x^4 - \frac{x^5}{2} + 3x^7,\ \ y = 4 \cdot 4x^3 - \frac{1}{2} \cdot 5x^4 + 3 \cdot 7x^6 =$$
$$= 21x^6 - \frac{5}{2}x^4 + 16x^3.$$

Этот способ приводит к цели быстрее.

3. Воспользуемся формулой производной дроби (6.6)

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^4+5}\right)' = \frac{\left(x^3\right)'\left(x^4+5\right) - x^3\left(x^4+5\right)'}{\left(x^4+5\right)^2} = \frac{3x^2\left(x^4+5\right) - x^3 \cdot 4x^3}{\left(x^4+5\right)^2} =$$
$$= \frac{3x^6 + 15x^2 - 4x^6}{\left(x^4+5\right)^2} = \frac{15x^2 - x^6}{\left(x^4+5\right)^2}.$$

4. Сначала воспользуемся формулой (6.6), а затем формулами (6.11-6.12)

$$y' = \left(\frac{6}{\sin x + 2\cos x}\right)' = \frac{6'\left(\sin x + 2\cos x\right) - 6\left(\sin x + 2\cos x\right)'}{\left(\sin x + 2\cos x\right)^2} =$$

$$= \frac{0\left(\sin x + 2\cos x\right) - 6\left(\cos x - 2\sin x\right)}{\left(\sin x + 2\cos x\right)^2} = \frac{6\left(2\sin x - \cos x\right)}{\left(\sin x + 2\cos x\right)^2}.$$

§2. Техника дифференцирования

Производная степенной функции

$$\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$$

Эту формулу словесно можно выразить так: производная степенной функции равна показателю степени (α), умноженному на основание в степени на единицу меньше и на производную основания.

29. Найти производные следующих функций:

1) $y=(1-4x)^3$; 2) $z=\sqrt[3]{x^5+2x}$; 3) $y=\sin^4 x$; 4) $s=\left(5t+tgt\right)^2$.

Решение

1. Найдем производную функции y как производную сложной функции:

$$y'=\left(\left(1-4x\right)^3\right)'=3\left(1-4x\right)^2\left(1-4x\right)'=3\left(1-4x\right)^2\left(-4\right)=-12\left(1-4x\right)^2.$$

2. Представим z как степенную функцию с дробным показателем, а затем продифференцируем:

$$z'=\left(\left(x^5+2x\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\left(x^5+2x\right)^{\frac{1}{3}-1}\left(x^5+2x\right)'=\frac{1}{3}\left(x^5+2x\right)^{-\frac{2}{3}}\left(5x^4+2\right)=$$

$$=\frac{5x^4+2}{3\sqrt[3]{\left(x^5+2x\right)^2}}.$$

3. $y'=\left(\sin^4 x\right)'=4\sin^3 x\cdot\left(\sin x\right)'=4\sin^3 x\cdot\cos x$.

4. $s'=\left(\left(5t+tgt\right)^2\right)'=2(5t+tgt)(5t+tgt)'=2(5t+tgt)\left(5+\dfrac{1}{\cos^2 t}\right)$.

Производные тригонометрических функций

$$(\sin u)'=\cos u\cdot u';\ (\cos u)'=-\sin u\cdot u';\ (tgu)'=\frac{u'}{\cos^2 u};$$

$$(ctgu)'=-\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

Словесно эти формулы можно выразить, например, так: производная синуса равна косинусу того же аргумента, умноженному на производную аргумента.

30. Найти производные следующих функций:

1) $y=\cos(2x+5)$; 2) $z=3\cdot\sqrt{1+\sin\dfrac{x}{3}}$;

3) $S=\dfrac{1}{3}tg^{3}t-ctg2t,$ вычислить $S'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

<u>Решение</u>

1) $y'=\left(\cos\left(2x+5\right)\right)'=-\sin\left(2x+5\right)\left(2x+5\right)'=-2\sin\left(2x+5\right)$;

2) $$z'=3\cdot\left(\left(1+\sin\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)'=3\cdot\frac{1}{2}\left(1+\sin\frac{x}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\sin\frac{x}{3}\right)'=$$

$$=\frac{3}{2}\left(1+\sin\frac{x}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{x}{3}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)'=\frac{3}{2}\left(1+\sin\frac{x}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(x\right)'=$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{3}}{2\sqrt{\left(1+\sin\frac{x}{3}\right)}}.$$

3) сначала вычислим производную S':

$$S'=\left(\frac{1}{3}tg^{3}t-ctg2t\right)'=\frac{1}{3}\left(tg^{3}t\right)'-\left(ctg2t\right)'=\frac{1}{3}\cdot3tg^{2}t\left(tgt\right)'-\frac{-\left(2t\right)'}{\sin^{2}2t}=$$

$$=tg^{2}t\cdot\frac{1}{\cos^{2}t}+\frac{2}{\sin^{2}2t}.$$

Затем подставим $t=\dfrac{\pi}{4}$ в выражение для производной:

$$S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\left(tg\frac{\pi}{4}\right)^{2}}{\cos^{2}\frac{\pi}{4}}+\frac{2}{\sin^{2}\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2}}+\frac{2}{1^{2}}=4.$$

$$\left(tg\frac{\pi}{4}=1, \quad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{2}=1 \right).$$

Производные показательных и логарифмических функций

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'; \quad (e^u)' = e^u u'; \quad (\log_a u)' = \frac{u'}{\ln a \cdot u}; \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

$\boxed{\textbf{31.}}$ Найти производные следующих функций:

1) $y = x^4 \cdot 2^x$; 2) $z = e^{-\sqrt{x}} + \ln^2 x$; 3) $s = \log_5\left(x^3 - 1\right)$;

4) $y = \ln\left(6x - \dfrac{1}{x}\right)$; 5) $y = \sqrt{1+e^{3x}}$, вычислить $y'(0)$.

Решение

1. Найдем производную y как производную произведения:

$$y' = \left(x^4\right)' \cdot 2^x + x^4\left(2^x\right)' = 4x^3 \cdot 2^x + x^4 \cdot 2^x \ln 2.$$

2. $$z' = \left(e^{-\sqrt{x}}\right)' + \left(\ln^2 x\right)' = e^{-\sqrt{x}}\left(-\sqrt{x}\right)' + 2\ln x\left(\ln x\right)' = -e^{-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\ln x \cdot \frac{1}{x}.$$

3. $$s' = \left(\log_5\left(x^3-1\right)\right)' = \frac{\left(x^3-1\right)'}{\left(x^3-1\right)\ln 5} = \frac{3x^2}{\left(x^3-1\right)\ln 5}.$$

4. $$y' = \left(\ln\left(6x - \frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{\left(6x - \frac{1}{x}\right)'}{6x - \frac{1}{x}} = \frac{\left(6x - x^{-1}\right)'}{6x - \frac{1}{x}} = \frac{6 + x^{-2}}{6x - \frac{1}{x}} = \frac{6x^2+1}{\left(6x^2-1\right)x}.$$

5. $$y' = \left(\sqrt{1+e^{3x}}\right)' = \left(\left(1+e^{3x}\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(1+e^{3x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1+e^{3x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+e^{3x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{3x} \cdot \left(3x\right)' = \frac{3e^{3x}}{2\sqrt{1+e^{3x}}}.$$

Вычислим $y'(0) == \dfrac{3e^0}{2\sqrt{1+e^0}} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}} \quad (e^0 = 1).$

Производные обратных тригонометрических функций

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \qquad (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$(\mathrm{arc}\,tgu)' = \frac{u'}{1+u^2}; \qquad (\mathrm{arc}\,ctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

32. Найти производные функций:

1) $y = (\arcsin x)^2$; 2) $z = {arctg2t}/{t}$; 3) $s = 2^{\arccos 3x}$.

<u>Решение</u>

1. Дифференцируем y как степенную функцию

$$y' = 2\arcsin x(\arcsin x)' = 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. Производную функции z находим по формуле производной дроби

$$z' = \frac{(arctg2t)' \cdot t - t' \cdot arctg2t}{t^2} = \frac{\frac{(2t)'}{1+(2t)^2} \cdot t - arctg2t}{t^2} = \frac{\frac{2t}{1+4t^2} \cdot t - arctg2t}{t^2}.$$

3. Функция s - показательная, поэтому

$$s = 2^{\arccos 3x} \ln 2 (\arccos 3x)' = 2^{\arccos 3x} \ln 2 \left(-\frac{(3x)'}{\sqrt{1-9x^2}} \right) = -\frac{3 \cdot 2^{\arccos 3x} \ln 2}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

Продифференцировать самостоятельно следующие функции:

33. $y = \left(\frac{x}{1-x} \right)^5$. **34.** $z = \sqrt{ctg \frac{x}{2}}$. **35.** $y = \ln(x+1) + \arcsin \frac{x}{2}$.

36. $z = \left(x^7 + 7^x \right)^3$. **37.** $S = \ln^2 \left(e^t + 1 \right)$, вычислить $S'(0)$.

38. $y = \sqrt[3]{x} \cdot \sin(2-3x)$. **39.** $y = \arcsin \sqrt{x}$. **40.** $y = \cos^2 x + \ln tg \frac{x}{2}$.

41. $z = \frac{4}{1+2x}$, вычислить $z'(-1)$. **42.** $y = e^{t^2+2t}$.

§3. Геометрический и механический смысл производной

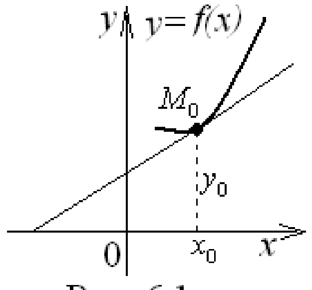

Рис. 6.1.

Геометрический смысл производной

Пусть $y = f(x)$ – уравнение некоторой кривой, а $M\left(x_0; y_0\right)$ – точка, лежащая на этой кривой, т.е. $y_0 = f(x_0)$.
Значение производной функции $f(x)$ при $x = x_0$ равно ***угловому коэффициенту касательной*** к данной кривой в точке M_0. Итак, если α - угол между касательной к данной кривой в точке M_0 и положительным направлением оси Ox (рис. 6.1), то $f'(x_0) = tg\alpha = k$.
Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)\left(x - x_0\right). \qquad (6.19)$$

43. Найти уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке, где $x_0 = -2$.

Решение

Вычислим сначала ординату точки касания $y_0 = (x_0)^2 = \left(-2\right)^2 = 4$. Для определения углового коэффициента касательной находим производную от функции $y = x^2$: $y' = \left(x^2\right)' = 2x$ и ее значение $y'\left(-2\right) = 2\left(-2\right) = -4$, $M_0\left(-2;4\right)$. Угловой коэффициент касательной $k = -4$, и ее уравнение будет таким: $y - 4 = -4\left(x + 2\right)$, или $y = -4x - 4$.

Механический смысл производной

Пусть точка M движется по прямой. Обозначим через S – расстояние, пройденное движущейся точкой от начала отсчета O за время t, значит S – функция времени t: $S = f(t)$ (рис. 6.2.).

Рис. 6.2.

Производная S по t – это скорость V точки M в данный момент времени t, т.е. $V(t) = S'(t)$.

44. Точка движется прямолинейно по закону $S = t^2 + 2t + 5$,где S – расстояние точки от начал отсчета (м), t - время движения (с). Определить скорость движения точки в конце четвертой секунды.

Решение

Скорость движения точки $V = S'(t)$:

$$V = \left(t^2 + 2t + 5\right)' = 2t + 2.$$

Определим скорость движения точки при $t = 4$:

$$V\left(4\right) = 2 \cdot 4 + 2 = 10 \text{ (м/с).}$$

§4. Применение производной для исследования поведения функции и построения графиков

Признаки монотонности функции

В главе 5 (§2) дано определение возрастающей и убывающей функций. Сформулируем без доказательства теоремы о возрастании и убывании функции.

Теорема 1. Если дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале $(a;b)$, то ее производная $f'(x) \geq 0$ (для убывающей функции $f'(x) \leq 0$) на этом интервале (необходимый признак монотонности функции).

45. Построить график функции $y = x^2 - 2x + 2$ и указать знаки ее производной в области определения.

Решение

Графиком функции является парабола с осью симметрии, параллельной оси ординат. Преобразуем уравнение $y = x^2 - 2x + 2$, выделив полный квадрат относительно x · y = x^2 - 2x + 1 + 1=$(x - 1)^2$ + 1. Ветви параболы направлены вверх (рис. 6.3.). Данная функция убывает на интервале $(-\infty;1)$ и возрастает на интервале $(1;+\infty)$. Найдем $y' = (x^2 - 2x + 2)' = 2x - 2$. Если $x < 1$, то $y' < 0$ и если $x > 1$, $y' > 0$.

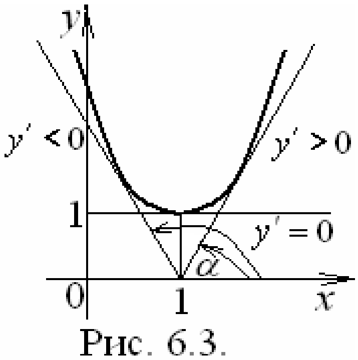

Рис. 6.3.

Из рис. 6.3. видно, что касательная к графику убывающей функции наклонена к оси Ox под тупым углом $(tg\alpha < 0$ и $y' < 0)$. Если же функция возрастает, то угол наклона касательной в любой точке острый $(tg\alpha > 0$ и $y' > 0)$. В точке $x = 1$ $y' = 0 \left(tg\alpha = 0\right)$ и касательная параллельна оси Ox.

<u>Теорема 2.</u> Если производная функции $f(x)$ на интервале положительна (отрицательна), то функция возрастает (убывает) на этом интервале (достаточный признак монотонности).

$\boxed{\textbf{46.}}$ Найти интервалы возрастания и убывания функций:

1) $y = x^2 + 1$; 2) $y = -x^3$; 3) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$; 4) $y = \dfrac{x^2}{x-4}$.

<u>Решение</u>

1. Функция $y = x^2 + 1$ определена на всей числовой оси – $(-\infty;+\infty)$. Найдем производную функции $y' = \left(x^2+1\right)' = 2x$. Функция убывает, если $y' < 0$, т.е. $2x < 0$ или $x < 0$ и возрастает, если $2x > 0$ или $x > 0$. Итак, в интервале $(-\infty;0)$ функция убывает, а в интервале $(0;+\infty)$ – возрастает.

2. Функция $y = -x^3$ определена на интервале $(-\infty;+\infty)$. Найдем производную $y' = \left(-x^3\right)' = -3x^2$ и так как для всех x $x^2 \geq 0$, то $y' \leq 0$ ($y' = 0$ только в одной точке $x = 0$). Следовательно, в области определения функция убывает.

3. Область определения функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$, т.е. вся числовая ось. Найдем производную

$$y' = \left(2x^3 - 3x^2 - 12x\right)' = 6x^2 - 6x - 12 = 6\left(x^2 - x - 2\right).$$

Исследуем знак y' в области определения методом интервалов, для чего приравняем производную y' к 0. $x^2 - x - 2 = 0$. Корни уравнения $x_1 = -1,\ x_2 = 2$.

Рассмотрим три интервала:

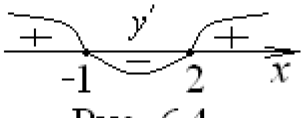

Рис. 6.4.

$(-\infty;-1)$, $(-1;2)$, $(2;+\infty)$, на каждом из которых определим знак производной, подставив какую-либо точку интервала в выражение производной y'. Например, в интервале $(-\infty;-1)$ возьмем $x = -2$ и вычислим $y' = (-2) = 6(-2)^2 - 6(-2) - 12 = 24 + 12 - 12 = 24 > 0$, значит $(-\infty;-1)$

- интервал возрастания. Точно так же в интервале $(-1;2)$ вычислим $y' = (0) = -12 < 0$, а в интервале $(2;+\infty)$ – $y'(3) = 24 > 0$ (рис. 6.4.), следовательно, $(-1;2)$ – интервал убывания, а $(2;+\infty)$ – интервал возрастания функции.

4. Область определения функции $y = \dfrac{x^2}{x-4}$ - все точки числовой прямой, кроме $x = 4$, т.е. $(-\infty;4) \cup (4;+\infty)$. Находим $y' = \left(\dfrac{x^2}{x-4}\right)' =$

$$= \frac{(x^2)'(x-4) - x^2(x-4)'}{(x-4)^2} = \frac{2x(x-4) - x^2}{(x-4)^2} = \frac{2x^2 - 8x - x^2}{(x-4)^2} = \frac{x^2 - 8x}{(x-4)^2} = \frac{x(x-8)}{(x-4)^2}.$$

Приравняем $y' = 0$: $\dfrac{x(x-8)}{(x-4)^2} = 0,\ x(x-8) = 0$ и $x_1 = 0,\ x_2 = 8$ – корни производной. Эти точки разделяют область определения на интервалы: $(-\infty;0),\ (0;4),\ (4;8),\ (8;+\infty)$.

На каждом из них исследуем знак y' и делаем вывод о возрастании или убывании функции:

1) $(-\infty;0)$, $y'(-1) = \dfrac{9}{25} > 0$ и y возрастает (↑);

2) $(0;4)$, $y'(1) = -\dfrac{7}{9} < 0$ и y убывает (↓);

3) $(4;8)$, $y'(5) < 0$, и y убывает(↓);

4) $(8;+\infty)$, $y'(9) > 0$, и y возрастает (↑).

Максимум и минимум функции

Точка $x = x_0$ называется ***точкой максимума*** функции $y = f(x)$, если для всех значений x, достаточно близких к x_0, $f(x_0) > f(x)$. $f(x_0)$ называется максимумом функции $f(x)$.

Точка $x = x_1$ называется ***точкой минимума*** функции $y = f(x)$, если для всех x, достаточно близких к x_1, $f(x_1) < f(x)$.
$f(x_1)$ - минимум функции $f(x)$.

Максимум или минимум функции называется ***экстремумом*** функции, а точка, в которой достигается максимум или минимум, называется ***точкой экстремума***.

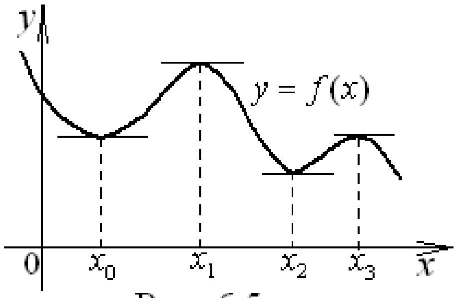

Рис. 6.5.

На рис. 6.5. изображен график функции, которая имеет минимум в точках x_0 и x_2, а в точках x_1 и x_3 - максимум. Из определения максимума и минимума функции следует, что понятие экстремума является локальным свойством функции, т.е. значения функции сравниваются только в точках, достаточно близких к точкам экстремума. Кроме того, отдельные минимумы могут быть больше максимумов функции. Например, минимум функции в точке x_0 (рис.6.5) больше максимума в точке x_3, $f(x_0) > f(x_3)$.

Сформулируем теорему, выражающую необходимый признак существования экстремума.

<u>**Теорема 3.**</u> Если $x = x_0$ – точка экстремума дифференцируемой функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Этот результат наглядно подтверждается геометрически (рис. 6.5.): касательная к графику функции в точках экстремума параллельна оси Ox, так как $k = tg\alpha = f'(x_0) = 0$, значит $\alpha = 0$ (α - угол наклона касательной к оси Ox).

Однако, условие $f'(x_0) = 0$ не является достаточным для наличия экстремума в точке x_0. Можно привести примеры, когда это условие соблюдается, а экстремума нет.

Например, функция $y = -x^3$ $(y' = -3x^2)$ имеет при $x = 0$ $y' = 0$, но из графика функции (рис. 6.6.) видно, что в точке $x = 0$ нет экстремума,

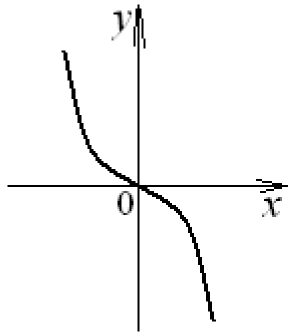

Рис. 6.6.

касательная пересекает график функции, совпадая с осью Ox.
Значения аргумента, при которых производная функции равна 0, называются ***критическими***. Таким образом, если функция имеет экстремум, то он может быть только в критических точках.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некотором интервале, содержащем критическую точку

x_0 $\left(f'(x_0)=0\right)$. Сформулируем при этом условии достаточный признак существования экстремума.

Теорема 4. Если при переходе аргумента x (слева направо) через критическую точку x_0 производная $f(x)$ меняет знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум; если знак меняется с минуса на плюс, то минимум; если производная знака не меняет, то экстремума нет.

47. Найти точки экстремума функций:

1) $y=2x^3-3x^2+1$; 2) $y=\dfrac{x^4}{4}-x^3$.

Решение

1. Функция $y=2x^3-3x^2+1$ определена и непрерывна на интервале $(-\infty;+\infty)$. Найдем производную, приравняем ее к 0 и определим критические точки.

$y'=\left(2x^3-3x^2+1\right)'=6x^2-6x=6x(x-1)=0$. Итак, $x_1=0$ и $x_2=1$ – критические точки.

Составим таблицу изменения знаков $f'(x)$.

x	$(-\infty;0)$	$x=0$	$(0;1)$	$x=1$	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\uparrow$	1 max	$\downarrow$	0 min	$\uparrow$

При $x=-1$, $y'(-1)>0$, значит, $y'>0$ на интервале $(-\infty;0)$, при $x=\dfrac{1}{2}$ $y'<0$, и, наконец, при $x=2$ $y'>0$ (возрастание и убывание функции показано стрелками). Из таблицы видно, что при переходе через точку $x=0$, производная меняет знак с «+» на «–», значит $x=0$ – точка максимума. При переходе через точку $x=1$ производная меняет знак с «–» на «+», значит $x=1$ – точка минимума. Определим экстремальные значения функции, подставив $x=0$ и $x=1$ в функцию

$$y_{\max}=2\cdot 0^3-3\cdot 0^2+1=1,\ y_{\min}=2\cdot 1^3-3\cdot 1^2+1=0.$$

2. Функция $y=\dfrac{x^4}{4}-x^3$ определена и непрерывна на всей числовой прямой – $(-\infty;+\infty)$. Найдем производную y' и определим критические точки из уравнения $y'=0$

$$y'=\left(\frac{x^4}{4}-x^3\right)'=\frac{1}{4}\cdot 4x^3-3x^2=x^3-3x^2=x^2(x-3)=0.$$

Критические точки $x_1=0$, $x_2=3$. Составим таблицу изменения знаков $f'(x)$:

x	$(-\infty;0)$	$x=0$	$(0;3)$	$x=3$	$(3;+\infty)$
$f'(x)$	–	0	–	0	+
$f(x)$	$\downarrow$	0	$\downarrow$	$-27/4$ min	$\uparrow$

На интервале $(-\infty;0)$ возьмем $x=-1$, $y'(-1)=-4<0$, функция убывает; на интервале $(0;3)$ возьмем $x=1$, $y'(1)=-2<0$, функция убывает; на интервале $(3;+\infty)$ при $x=4$, $y'(4)=16>0$, функция возрастает. Таким образом, при переходе через $x=3$ производная меняет знак с «–» на «+», значит, $x=3$, точка экстремума функции и $y_{\min}=\dfrac{3^4}{4}-3^3=-\dfrac{27}{4}$.

При переходе через точку $x=0$ производная знака не меняет, экстремума нет в этой точке.

Выпуклость и вогнутость графика функции. Точка перегиба

График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется ***выпуклым*** (***вогнутым***) на интервале $(a;b)$, если дуга кривой $y=f(x)$ расположена ниже (для вогнутого – выше) касательной, проведенной в любой точке этой дуги. График функции, представленный на рис. 6.7., является выпуклым на интервале $(x_1;x_0)$ и вогнутым на интервале $(x_0;x_2)$.

Точки, отделяющие выпуклую часть кривой от вогнутой, называются ***точками перегиба***. Так, точка $M_0(x_0;y_0)$ – точка перегиба.

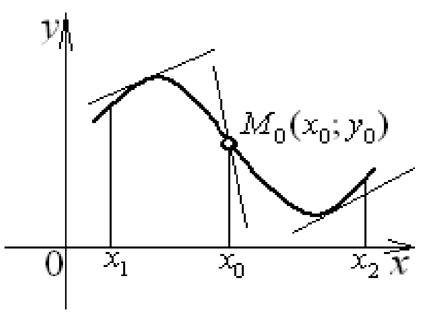

Рис. 6.7.

Пусть дана дифференцируемая функция $y = f(x)$, производная ее $y' = f'(x)$ также является функцией от аргумента x (в общем случае) и для этой функции можно также рассматривать производную, т.е.

$$\left(y'\right)' = \left(f'(x)\right)' = y'' = f''(x).$$

$y'' = f''(x)$ называется второй производной или производной второго порядка.

Встречается и такое обозначение второй производной: $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

48. Найти вторую производную функции $y = \ln x$.

Решение

Находим сначала первую производную $y' = \left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$.

$$y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Переходя к использованию второй производной для исследования функций, будем предполагать в дальнейшем, что исследуемые функции дважды дифференцируемы в рассматриваемых интервалах.

Сформулируем достаточный признак выпуклости и вогнутости графика функции $y = f(x)$ на $(a;b)$.

Теорема 5. Если $f''(x) < 0$ на $(a;b)$, то кривая $y = f(x)$ является выпуклой на этом интервале; если же $f''(x) > 0$, то вогнутой.

Следующая теорема позволяет определить правило нахождения точек перегиба кривой $y = f(x)$.

Теорема 6. Если $f''(x) = 0$ и при переходе x через точку x_0 вторая производная меняет знак, то точка $M_0(x_0; y_0)$ есть точка перегиба графика функции $y = f(x)$.

49. Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости графиков функции:

1) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$; 2) $y = \dfrac{x^4}{4} - x^3$.

Решение

В прим. 47 были найдены точки экстремума и интервалы монотонности данных функций. Продолжим исследование поведения этих функций с помощью y''.

1. $y' = \left(2x^3 - 3x^2 + 1\right)' = 6x^2 - 6x$. Находим вторую производную $y'' = \left(6x^2 - 6x\right)' = 12x - 6$. Приравниваем вторую производную к 0: $12x - 6 = 0,\ \ x = 0,5$. Составим таблицу изменения знаков $y'' = f''(x)$.

x	$(-\infty; 0,5)$	$x = 0,5$	$(0,5; +\infty)$
$f''(x)$	–	0	+
$f(x)$	$\cap$	0,5	$\cup$

Возьмем на интервале $(-\infty; 0,5)$ любую точку, например, $x = 0$ и подставим это значение во вторую производную: $f''(0) = 12 \cdot 0 - 6 =$ $= -6 < 0$, значит, на этом интервале кривая $y = f(x)$ выпукла $(\cap)$. На интервале $(0,5; +\infty)$ возьмем $x = 1$ и вычислим $f''(1) = 12 \cdot 1 - 6 = 6 > 0$, на этом интервале $y = f(x)$ вогнута $(\cup)$. При переходе аргумента через $x = 0,5$ $f''(x)$ меняет знак, точка с абсциссой $x = 0,5$ является точкой перегиба. Вычислим

$$y(0,5) = 2 \cdot 0,5^3 - 3 \cdot 0,5^2 + 1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{2},\quad A\left(0,5; 0,5\right).$$

Используя исследование поведения функции с помощью y' и y'', построим график (рис. 6.8.).

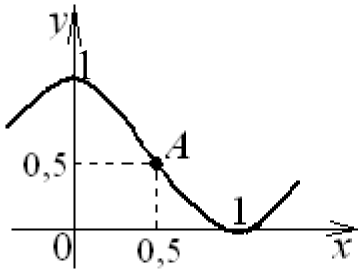

Рис. 6.8.

2. $y' = \left(\dfrac{x^4}{4} - x^3\right)' = x^3 - 3x^2$. Находим $y'' = \left(x^3 - 3x^2\right)' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. Решим уравнение $3x(x-2) = 0;\ x_1 = 0;\ x_2 = 2$. Составим таблицу изменения знаков y''.

x	$(-\infty; 0)$	$x = 0$	$(0; 2)$	$x = 2$	$(2; +\infty)$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\cup$	0	$\cap$	–4	$\cup$

На интервале $(-\infty; 0)$ $y''(-1) > 0$ кривая вогнута. Рассмотрим интервал $(0; 2)$, здесь $y''(1) < 0$, кривая выпукла. И на интервале $(2; +\infty)$

$y''(3) > 0$, кривая вогнута. Вычислим $y(0) = 0$ и $y(2) = \dfrac{2^4}{4} - 8 = -4$, и точки $O(0;0)$ и $B(2;-4)$ - точки перегиба.

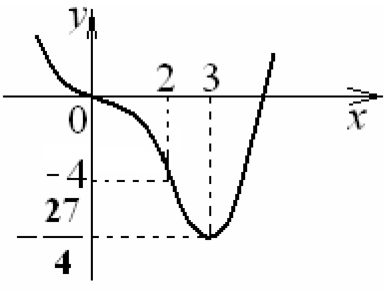

Рис.6.9.

Построим график функции $y = \dfrac{x^4}{4} - x^3$, используя исследования функции с помощью y' и y'' (рис.6.9).

Асимптоты кривой

Асимптотой кривой называется такая прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении ее от начала координат. Умение находить асимптоты кривой облегчает построение графика функции.

Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$, если выполняется условие

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad (6.20)$$

Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой кривой при $x \to \infty$, если выполнены условия

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad (6.21)$$

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = b \qquad (6.22)$$

Если $k = 0$ и $b \neq \infty$, получим асимптоту $y = b$ (горизонтальную).

50. Найти уравнения асимптот кривых:

1) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$, 2) $y = \dfrac{2x^2 + 2}{x^2 + 3}$.

<u>Решение</u>

1. При $x = 1$ кривая $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ имеет бесконечный разрыв, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x-1} = \infty$.

Следовательно, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой. Далее находим наклонные асимптоты

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{(x-1) \cdot x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-1} \left(\frac{\infty}{\infty} \right);$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1.$$

Подставляя найденные значения k и b в уравнение $y=kx+b$, получим уравнение наклонной асимптоты $y=x+1$.

2) Кривая $y=\dfrac{2x^2+2}{x^2+3}$ не имеет вертикальных асимптот, так как функция $\dfrac{2x^2+2}{x^2+3}$ всюду определена и не имеет точек разрыва. Вычислим

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+2}{\left(x^2+3\right)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{3x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{3}{x^2}}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+2}{x^2+3}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}=2\cdot$$

Получим уравнение наклонной асимптоты $y=2$ (горизонтальная асимптота).

Построение графиков функций

Исследование поведения функций и построение их графиков удобно выполнять, пользуясь следующей схемой:

1) найти область определения функции, точки разрыва;
2) исследовать четность, нечетность функции;
3) найти асимптоты графика функции;
4) найти точки экстремума, интервалы монотонности;
5) найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости;
6) найти точки пересечения графика функции с осями координат;
7) построить график функции, используя полученные результаты.

$\boxed{\textbf{51.}}$ Исследовать функции и построить их графики:

1) $y = x^3 + 3x^2$; 2) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$; 3) $y = \dfrac{2x^2+2}{x^2+3}$.

Решение

Руководствуясь схемой исследования функций, последовательно находим:

1. Область определения функции $y = x^3 + 3x^2$ – вся числовая прямая, т.е. $(-\infty;+\infty)$. Точек разрыва нет, нет и вертикальных асимптот.

Исследуем наличие наклонных асимптот

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2}{x} = \lim_{x\to\infty}(x^2+3x) = \infty.$$

Угловой коэффициент асимптоты не существует, следовательно, наклонной асимптоты кривая не имеет.

Можно показать, что любой многочлен не имеет асимптот. Проверим четность, нечетность функции

$$f(-x) = (-x)^3 + 3(-x)^2 = -x^3 + 3x^2$$

и видим, что функция не является ни четной, ни нечетной.

Находим $y' = \left(x^3+3x^2\right)' = 3x^2+6x = 3x(x+2)$, приравниваем производную к 0 и определяем критические точки $y' = 3x(x+2) = 0$, $x_1 = -2,\ x_2 = 0$.

Составим таблицу интервалов монотонности.

Определим знаки y' в указанных интервалах:

x	$(-\infty;-2)$	$x=-2$	$(-2;0)$	$x=0$	$(0;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↑	4	↓	0	↑

$(-\infty;-2),\ y'(-3) > 0,$ функция возрастает;

$(-2;0),\ y'(-1) < 0,$ функция убывает;

$(0;+\infty),\ y'(1) > 0,$ функция возрастает.

Итак, $x=-2$ – точка максимума, $x=0$ – точка минимума, $y_{\max} = y(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 = -8+12 = 4$, $y_{\min} = y(0) = 0$.

Находим $y'' = \left(3x^2+6x\right)' = 6x+6$, приравниваем y'' к 0: $6x+6=0,\ x=-1$. Составим таблицу интервалов выпуклости и вогнутости.

x	$(-\infty;-1)$	$x=-1$	$(-1;+\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	2	$\cup$

Определим знаки y'' в интервалах:

$(-\infty;-1)$, $y''(-2)<0$, кривая выпукла;

$(-1;+\infty)$, $y''(0)>0$, кривая вогнута.

Сравнивая знаки y'' слева и справа от $x=-1$, делаем вывод о том, что при $x=-1$ кривая имеет перегиб, $y(-1)=2$, $M(-1;2)$ – точка перегиба.

Определим точки пересечения графика функции с осями координат: $y=0$, $x^3+3x^2=x^2(x+3)=0$.

Итак, точки пересечения с осью Ox, $O(0;0)$, $B(-3;0)$.

Построим график функции, используя все полученные результаты (рис. 6.10.).

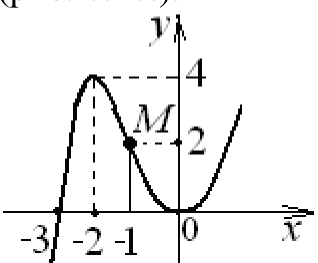

Рис. 6.10.

2. Область определения $y=\dfrac{x^2}{x-1}$: $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, $x=1$ – точка разрыва.

Асимптоты к графику этой функции найдены в прим. 50.

Это $x=1$ и $y=x+1$.

Функция $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ не является ни четной, ни нечетной. Находим

$$y'=\left(\frac{x^2}{x-1}\right)'=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

$y'=0$, значит, $x(x-2)=0$ и $x_1=0$, $x=2$ – критические точки.

Составим таблицу интервалов монотонности.

x	$(-\infty;0)$	$x=0$	$(0;1)$	$(1;2)$	$x=2$	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	0 max	$\downarrow$	$\downarrow$	4 min	$\uparrow$

Из найденного заключаем, что $x=0$ – точка максимума,

$y_{\max}=y(0)=0;\ \ x=2$ – точка минимума $y_{\min}=y(2)=4$.

Находим $y''=\left(\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right)'=\dfrac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4}=$

$=\dfrac{2(x-1)^2-2(x^2-2x)}{(x-1)^3}=\dfrac{2}{(x-1)^3}$. $y''\neq 0$ и, следовательно, кривая не имеет точек перегиба. Определим знаки y'' на интервалах области определения:

$(-\infty;1)$, $y''(0)<0$, кривая выпукла $(\cap)$;

$(1;+\infty)$, $y''(2)>0$, кривая вогнута $(\cup)$.

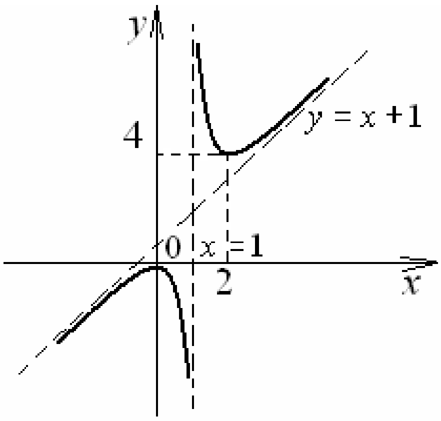

Рис. 6.11.

График функции пересекает оси координат в точке $O(0;0)$. Построим график функции, используя полученные результаты (рис. 6.11.). Построение чертежа начинаем с построения асимптот кривой.

3. Функция $y=\dfrac{2x^2+2}{x^2+3}$ определена на всей числовой прямой, т.е. на $(-\infty;+\infty)$. В прим. 50 показано, что прямая $y=2$ – горизонтальная асимптота к графику функций.

Функция является четной, так как выполнено условие

$f(-x)=\dfrac{2(-x)^2+2}{(-x)^2+3}=\dfrac{2x^2+2}{x^2+3}=f(x)$, ее график симметричен относительно оси ординат, поэтому исследование можно вести только для $x\geq 0$.

$$y'=\left(\frac{2x^2+2}{x^2+3}\right)'=\frac{4x(x^2+3)-2x(2x^2+2)}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{4x^3+12x-4x^3-4x}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{8x}{\left(x^2+3\right)^2}.$$

$y'=0,\ 8x=0$ и $x=0$ – критическая точка.

Составим таблицу интервалов монотонности.

x	$(-\infty;0)$	$x=0$	$(0;+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\downarrow$	$2/3$	$\uparrow$

		min	

Исследуем поведение функции в указанных интервалах:

$(-\infty;0)$, $y'(-1)<0$ функция убывает;

$(0;+\infty)$, $y'(1)>0$, функция возрастает;

$x=0$ – точка минимума, $y_{\min}=f(0)=\dfrac{2}{3}$.

$$y''=\left(\frac{8x}{\left(x^2+3\right)^2}\right)=8\frac{\left(x^2+3\right)^2-x\cdot 2\left(x^2+3\right)\cdot 2x}{\left(x^2+3\right)^4}=8\frac{x^2+3-4x^2}{\left(x^2+3\right)^3}=8\frac{3-3x^2}{\left(x^2+3\right)^3}.$$

$y''=0,\ 3-3x^2=0,\ x^2=1,\ x_1=-1,\ x_2=1.$

Составим таблицу интервалов выпуклости и вогнутости.

x	$(-\infty;-1)$	$x=-1$	$(-1;1)$	$x=1$	$(-1;+\infty)$
$f''(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	$\cap$	1	$\cup$	1	$\cap$

Исследуем кривую на выпуклость и вогнутость:

$(-\infty;-1)$, $y''(-2)<0,$ кривая выпукла $(\cap)$;

$(-1;1)$, $y''(0)>0,$ кривая вогнута $(\cup)$;

$(-1;+\infty)$, $y''(2)<0,$ кривая выпукла $(\cap)$.

Из полученного делаем вывод о том, что точки $(-1;1)$ и $(1;1)$ являются точками перегиба.

Так как $y=\dfrac{2x^2+2}{x^2+3}\neq 0$, график функции не пересекает ось Ox.

На рис. 6.12. построен график функции по результатам исследования.

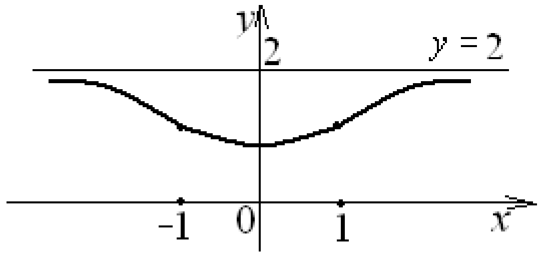

Рис. 6.12.

Применение второй производной для нахождения экстремума

Сформулируем еще один достаточный признак существования экстремума (второй).

Теорема. Если в точке $x = x_0$ первая производная функции $f(x)$ обращается в нуль $(f'(x_0) = 0)$, а вторая производная в нуль не обращается, т.е. $f''(x_0) \neq 0$, то при $f''(x_0) < 0$ функция имеет в точке x_0 максимум и минимум при $f''(x_0) > 0$.

52. Исследовать функцию $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ на экстремум с помощью второй производной.

Решение

Область определения функции – $(-\infty;+\infty)$. Находим $y' = 3x^2 - 12x + 9$, $3x^2 - 12x + 9 = 0,\ x^2 - 4x + 3 = 0$. Критические точки: $x_1 = 1,\ x_2 = 3$.

Находим $y'' = \left(3x^2 - 12x + 9\right)' = 6x - 12 = 6(x-2)$. Вычислим $y''(1) = -6 < 0$, значит $x = 1$ – точка максимума, $y_{\max} = y(1) = 0$. Вычислим $y''(3) = 6 > 0$, значит $x = 3$ – точка минимума, $y_{\min} = y(3) = -4$.

Наибольшее и наименьшее значения функции

Наибольшим значением функции на заданном интервале называется самое большее, а ***наименьшим*** – самое меньшее из всех ее значений на этом интервале.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции основано на следующих свойствах:

1) если в некотором интервале функция $f(x)$ непрерывна и имеет только один экстремум и если это максимум (минимум), то он будет наибольшим (наименьшим) значением функции в этом интервале;

2) если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значения. Эти значения достигаются или в точках экстремума, или на концах отрезка.

53. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x^2$ на отрезке $[-1;5]$.

Решение

Находим критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[-1;5]$.

$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2);\ x_1 = 0,\ x_2 = 2.$

Вычислим значения функции в критических точках

$y(0) = 0,\ y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 8 - 12 = -4$.

Вычислим значения функции на концах отрезка

$y(-1) = (-1)^3 - 3 = -4,\ y(5) = 5^3 - 3 \cdot 5^2 = 125 - 75 = 50$.

Сравнив между собой полученные значения функции, делаем вывод, что наименьшее значение $y_{\text{í àèì .}} = -4 = y(2) = y(-1)$, а наибольшее $y_{\text{í àèá.}} = y(5) = 50$.

Примеры для самостоятельных упражнений

Исследовать функции и построить их графики.

54. $y = \dfrac{x}{x^2+4}$. **55.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$. **56.** $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x}$. **57.** $y = \dfrac{x^2+2}{x^2-9}$.

§5. Дифференциал функции

Пусть на $(a;b)$ дана дифференцируемая функция $y = f(x)$ и $x = x_0$ – точка, лежащая внутри интервала $(a;b)$. По определению производной

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

При малых значениях Δx отношение $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ сколь угодно мало отличается от $f'(x_0)$, т.е. можно принять, что

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \approx f'(x_0) \text{ или } f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x, \quad (6.23)$$

или приращение функции $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$. Это приближенное значение приращения и называется ***дифференциалом*** функции и обозначается $dy = f'(x_0)\Delta x$.

Если $y = x$, то $dy = dx = x' \cdot \Delta x = \Delta x$. Таким образом, дифференциал независимой переменной x равен ее приращению: $dx = \Delta x$.

Дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал независимой переменной, т.е.

$$dy = f'(x_0)dx \tag{6.24}$$

58. Найти дифференциалы следующих функций в точке x:

1) $y = x^4 - 2x^3$; 2) $y = \sin^2 x$.

Решение

$dy = f'(x)dx$, следовательно, чтобы найти дифференциал функции, нужно ее производную умножить на dx.

1. $y' = 4x^3 - 6x^2;\ dy = \left(4x^3 - 6x^2\right)dx.$

2. $y' = \left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x;\ dy = \sin 2x dx.$

Подобно таблице производных можно составить таблицу дифференциалов:

1) $d(C) = C' \cdot dx = 0 \cdot dx = 0$, где C – постоянная; пусть $u = u(x),\ v = v(x)$ – дифференцируемые функции;

2) $d(u+v) = (u+v)'dx = u'dx + v'dx = du + dv$;

3) $d(u \cdot v) = \left(u'v + uv'\right)dx = vdu + udv$;

4) $d(\ln x) = (\ln x)'dx = \dfrac{dx}{x}$;

5) $d(\sin x) = (\sin x)'dx = \cos x dx$;

6) $d(x^n) = (x^n)'dx = nx^{n-1}dx$ и т.д.

Принимая во внимание приближенное равенство (6.23), можно записать, что

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{6.25}$$

Следовательно, приращенное значение функции приближенно равно ее начальному значению плюс дифференциал функции. Формулу (6.25) можно применять для приближенного вычисления значения функции.

§6. Применение понятия производной в экономике

Экономический смысл производной

Рассмотрим несколько примеров экономической интерпретации производной.

Предельные издержки производства. Пусть некоторое предприятие выпускает продукцию объема x (усл.ед.), при этом оно имеет издержки (затраты на сырье, электроэнергию, транспортировку продукции и т.п.), зависящие от количества продукции. Обозначим издержки производства $k = k(x)$ (ден.ед.).

Пусть количество выпускаемой продукции увеличивается на Δx, тогда приращению Δx соответствует приращение издержек $\Delta k = k(x + \Delta x) - k(x)$.

$\frac{\Delta k}{\Delta x}$ – приращение издержек производства на 1 ед. приращения количества продукции.

Найдем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta k}{\Delta x} = k'(x)$ (по определению производной).

В экономике этот показатель $k'(x)$ называется ***предельными издержками производства***.

59. Пусть $k(x) = 50x - 0,05x^3$ – издержки производства при выпуске x (ед.) продукции. Найти предельные издержки производства при объеме $x = 3$ ед.

Решение

Так как предельные издержки равны производной функции $k(x)$, находим $k'(x) = 50 - 0,15x^2$ и вычислим $k'(3) = 50 - 0,15 \cdot 9 = 48,65$.

Итак, при объеме продукции в 3 ед. издержки при производстве 4-ой единицы продукции составят приблизительно 48,65 (ден.ед.).

Предельная выручка. Пусть спрос на некоторый вид товара или услуги составляет S (усл.ед.). Обозначим U – выручку (ден.ед) от реализации товара, тогда $U = U(S)$.

Пусть величина спроса изменилась на ΔS, изменение выручки $\Delta U = U(S + \Delta S) - U(S)$.

Определим отношение $\dfrac{\Delta U}{\Delta S}$ - среднюю выручку от реализации 1 ед. товара. Найдем $\lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta U}{\Delta S} = U'(S)$ (по определению производной).

$U'(S)$ называется ***предельной выручкой***.

$\boxed{\textbf{60.}}$ Дана зависимость цены товара Z от спроса S: $Z = \dfrac{400}{S+4}$. Определить предельную выручку при спросе $S = 36$ ед.

Решение

Определим величину выручки U от реализации S ед. товара:

$U = S \cdot Z = \dfrac{400S}{S+4}$. Находим

$$U'(S) = \left(\frac{400S}{S+4}\right)' = 400\left(\frac{S}{S+4}\right)' = 400\frac{S+4-S}{(S+4)^2} = \frac{1600}{(S+4)^2}.$$

Вычислим $U'(36) = \dfrac{1600}{(36+4)^2} = 1$. Это означает, что если спрос возрастает с 36 ед. до 37 ед., то выручка увеличивается приблизительно на 1 ден.ед.

Предельный продукт. Несколько обобщая сказанное в предыдущих примерах, рассмотрим производственную функцию $y = f(x)$, которая определяет соответствие, например, между величиной затрат x и величиной получаемого продукта y (возможен и другой содержательный смысл переменных x и y). Обозначим через Δx изменение затрат, тогда $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ – это добавочный продукт, полученный при увеличении затрат на Δx. Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – средняя скорость изменения величины продукта или ***средняя отзывчивость*** производственной функции, соответствующая величине затрат в размере Δx.

Вычислим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y'$.

Этот предел определяет скорость изменения массы продукта при данной величине затрат.

Итак, $y' = f'(x)$ – это ***отзывчивость производственной функции*** $y = f(x)$ при данном уровне затрат (экономический смысл производной). В экономической литературе $f'(x)$ называется ***предельным продуктом***.

Темп роста функции

Пусть $y = f(x)$ – дифференцируемая функция на рассматриваемом интервале, тогда скорость изменения функции определяется как $y' = f'(x)$.

Относительной скоростью или темпом роста (изменения) функции называется отношения $\dfrac{y'}{y}$.

Обозначим темп роста T.

$$T = \frac{y'}{y}. \tag{6.26}$$

Часто T выражают в процентах, т.е. $T = \dfrac{y'}{y} \cdot 100\%$.

С другой стороны, отношение $\dfrac{y'}{y} = (\ln y)'$, таким образом, темп роста функции равен производной от $\ln y$.

$$T = (\ln y)'. \tag{6.27}$$

$\boxed{\textbf{61.}}$ Определить темп роста спроса S относительно цены Z товара, если $S = \dfrac{200}{Z+4}$. Вычислить темп роста при $Z = 1$.

<u>Решение</u>

Находим

$$T = (\ln S)' = \left(\ln\frac{200}{Z+4}\right)' = \left(\ln 200 - \ln(Z+4)\right)' = 0 - \left(\ln(Z+4)\right)' = -\frac{1}{Z+4}.$$

Вычислим $T(1) = -\dfrac{1}{5}$. При цене товара $Z = 1$ спрос снижается, темп снижается $\left(\dfrac{1}{5} \cdot 100\% = 20\%\right)$ составляет 20 %.

Эластичность функции

При нахождении производной функции $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ мы имеем дело с абсолютными изменениями переменных x и y $\left(\Delta x \text{ è } \Delta y\right)$. Но во многих задачах относительные изменения переменных x и y интересуют экономистов гораздо больше, чем абсолютные. Поэтому наряду с производными при анализе различных зависимостей в экономике пользуются особыми показателями, называемыми эластичностями.

Обозначим относительные приращения переменных x и y соответственно δx и δy.

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}; \quad \delta y = \frac{\Delta y}{y}.$$

Эластичность переменной y относительно переменной x называется пределом

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = E_x(y). \qquad (6.28)$$

Переменные величины, встречающиеся в экономических задачах, как правило, принимают только положительные значения (случаи, когда $x = 0,\ y = 0$ рассматриваются как предельные), поэтому мы будем здесь предполагать, что $x > 0,\ y > 0$.

Так как условие $\delta x \to 0$ равносильно условию $\Delta x \to 0$, то формулу (6.28) можно представить иначе

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'. \qquad (6.29)$$

В экономической литературе дается следующее толкование эластичности: эластичность показывает приближенно на сколько процентов увеличится (или уменьшится) значение функции, если значение аргумента увеличится на 1 %. Другими словами, эластичность – это мера реакции функции на изменения аргумента.

Эластичность – безразмерная величина, значение которой не зависит от того, в каких единицах измеряется аргумент и функция, δx и δy могут выражаться и в процентах.

Из формулы эластичности функции $E_x(y) = \dfrac{x}{y} \cdot y'$ видно, что при $x > 0$ и $y > 0$ знак $E_x(y)$ совпадает со знаком y', т.е. $E_x(y) > 0$ для возрастающей функции и $E_x(y) < 0$ для убывающей функции.

Приведем конкретные примеры анализа эластичности функции.

Эластичность спроса относительно цены. Известно, что спрос S зависит от цены Z, т.е. $S = S(Z)$. Тогда эластичность спроса относительно цены

$$E_Z(S) = \frac{Z}{S} \cdot S'(Z).$$

Обычно функция $S = S(Z)$ – убывающая и поэтому $S'(Z) < 0$ (с увеличением цены спрос снижается) и $E_Z(S) < 0$. Обозначим через $E_c = |E_Z(S)|$. Говорят, что если $E_c > 1$, то спрос эластичен; если $E_c = 1$, то спрос нейтрален; если $E_c < 1$, то спрос неэластичен.

62. Пусть спрос $S = ae^{-2Z}$, где Z – цена, a – постоянная, $a > 0$. Вычислить эластичность спроса относительно цены, если $Z = 3$.

Решение

$$E_Z(S) = \frac{Z}{S}\left(ae^{-2Z}\right)' = \frac{Z}{S}\left(-2ae^{-2Z}\right) = \frac{Z(-2ae^{-2Z})}{ae^{-2Z}} = -2Z.$$

Так как $Z > 0$, то $E_c = |-2Z| = 2Z$.

Если $Z = 3$, то $E_c = 6$, т.е. при цене 3 ден.ед. повышение цены на 1% вызовет снижение спроса на 6%. $E_c > 1$, спрос эластичен.

63. Определить, при какой цене (Z) спрос (S) на товар эластичен, нейтрален, неэластичен, если $S = 100 - Z$.

Решение

$$E_Z(S) = \frac{Z}{S}\left(100 - Z\right)' = \frac{Z(-1)}{100 - Z} = -\frac{Z}{100 - Z}.$$

По смыслу задачи $Z > 0$ и $Z < 100\left(100 - Z > 0\right)$.

$$E_c = \left|\frac{-Z}{100 - Z}\right| = \frac{Z}{100 - Z}.$$

Выясним, при каких значениях Z $E_c > 1$, для чего решим неравенство

$$\frac{Z}{100 - Z} > 1,\ \frac{Z}{100 - Z} - 1 > 0,\ \frac{2Z - 100}{100 - Z} > 0.$$

Так как $100 - Z > 0$, то и числитель $2Z - 100 > 0$ и $Z > 50$.

$E_c = 1$, если $\dfrac{Z}{100 - Z} = 1,\ Z = 50.$

$E_c < 1$, если $\dfrac{Z}{100 - Z} < 1,\ 0 < Z < 50.$

Из полученного заключаем, что если $50 < Z < 100,$ то спрос эластичен; $Z = 50,$ то спрос нейтрален; $0 < Z < 50,$ то спрос неэластичен.

Эластичность предложения относительно цены. Предложение P некоторого товара является функцией цены, т.е. $P = P(Z)$. Тогда

$$E_Z(P) = \frac{Z}{P} P'(Z).$$

64. $P = a\sqrt{Z}$, где $a > 0$, постоянная. Определить эластичность предложения относительно цены.

Решение

Находим $E_Z(P) = \dfrac{Z}{P}\left(a\sqrt{Z}\right)' = \dfrac{Z}{P} \cdot \dfrac{a}{2\sqrt{Z}} = \dfrac{Z}{a\sqrt{Z}} \cdot \dfrac{a}{2\sqrt{Z}} = \dfrac{1}{2}.$

Таким образом, при любом значении Z увеличение цены на 1 % даст прирост предложения на 0,5% (приблизительно).

Исследование динамики производственных функций с помощью производной

Эта задача нами рассмотрена в §4 данной главы. Приведем пример решения такой задачи для конкретной производственной функции.

65. Зависимость финансовых накоплений F предприятия от объема продукции (x) выражается формулой $F(x) = 0{,}01x^2 - 2x + 100$. Определить, при каких значениях объема x финансовые накопления будут возрастать.

Решение

Находим $F'(x) = \left(0{,}01x^2 - 2x + 100\right)'$. $F'(x) = 0{,}02x - 2$.

Функция $F(x)$ возрастает, если $F'(x) > 0$.Значит, $0{,}02x - 2 > 0$ и

$x > \dfrac{2}{0{,}02} = 100$ и финансовые накопления будут возрастать при объеме продукции, превышающем 100 ед.